

Ex1

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

* $\det M_f = 4 \Rightarrow M_f$ inversible $\Rightarrow \text{rg } f = 3$ et $\text{Ker } f = \{0\}$.

* $\det(M_f - 1I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ donc 1 est valeur propre.

$$\text{rg}(M_f - 1I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

donc $\dim \text{Ker}(M_f - 1I) = 3 - 2 = 1$ ainsi $\dim E_1 = 1$.

Ex2

1) Faux. Les 2x n'ont pas la forme λId avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\text{Vect}(X^4 + 2X) + (X^4 - 2X) = 2X^4$.

3) Faux. $\text{Vect}\{a, b, c, c\} = \text{Vect}\{a, b, c\} \neq \mathbb{R}^4$.

4) $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3$ donc Faux

5) $\det H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)$ non inversible si $a=1$ F

Si $a=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vrai

6) $P(X) = a(X^2 + X) + bX + 1$ donc $\{1, X + X^2\}$ génératrice de F , F sc de dimension 2.

7) Faux $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin F$.

8) $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5

$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$ donc Vrai

Ex3 $P_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 2 \\ -1 & 3-X & 1 \\ 3 & -3 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)[(1-X)^2 - 3]$
 $= (2-X)(1-\sqrt{3}-X)(1+\sqrt{3}-X)$

f est diagonalisable

$E_2 = \text{Vect}(1, 1, 0)$ $E_{1+\sqrt{3}} = \text{Vect}(2, 1, \sqrt{3})$ et $A^n = P D^n P^{-1}$

$E_{1-\sqrt{3}} = \text{Vect}(2, 1, -\sqrt{3})$

avec $D = \text{diag}(2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$