

# Devoir d'algèbre linéaire

## Devoir d'algèbre linéaire APAD

### Exercice 1

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dans la base  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $f$  est définie par :

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 + 4e_3$$

$$f(e_2) = e_1 + e_3$$

$$f(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

1. Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  $f$  est-elle bijective ?
2. Déterminer une base de  $\text{Ker } f$ .
3. Enoncer le théorème du rang, en déduire la dimension de  $\text{Im } f$  et une base de  $\text{Im } f$ .
4. Montrer que 1 est valeur propre de  $f$ . Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

### Exercice 2

Indiquer les propositions exactes en expliquant brièvement .

1. Dans l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , la famille  $\{\sin(x); \sin(2x)\}$  est liée.
2. Dans l'espace vectoriel des polynômes, la famille  $\{X^4; X^4 + 2X; X^4 - 2X\}$  est liée.

3. La famille  $\{a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^4$ .

4. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2 et son déterminant est 0.

5. Quel que soit le réel  $a$ , la matrice  $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible .Si  $a = 2$ , son inverse

$$\text{est : } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6.  $E = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $F = \{P \in E, P(X) = (aX^2) + aX + b; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$  est un espace vectoriel de dimension 2.
7.  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $F$  est l'ensemble des matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a - b & 1 \\ -4a & 5b \end{pmatrix}$$

$a$  et  $b$  étant deux réels quelconques, est un espace vectoriel.

8.  $Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$  et  $vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$  sont en somme directe dans  $\mathbb{R}^4$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice, dans la base  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ , est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $f$ .
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $f$ .
3.  $f$  est-elle diagonalisable ? si oui, donnez une base de chaque espace propre.
4. Expliquer une méthode de calcul de  $A^n$  pour  $n$  entier naturel. En déduire  $A^4$ .