Devoir d'algèbre linéaire

Devoir d'algèbre linéaire APAD

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$. Calculer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Que peut-on dire de u_1 ? Qu'en déduire pour f ?
2. Déterminer une base de $Kerf$
3. Déterminer une base de Imf
4. Enoncer et vérifier le théorème du rang.

Exercice 2

Indiquer les propositions exactes en expliquant brièvement .

1. Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\{e^x; e^{2x}\}$ est liée.
2. Dans l'espace vectoriel des polynômes, la famille $\{X^3; X^3 + X; X^3 - X\}$ est liée.
3. La famille $\{a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et son déterminant est 0.
5. La matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible , son inverse est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
6. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E, P(X) = (X^2 - 2) + aX + b; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel.
7. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, F est l'ensemble des matrices de la forme :

   $$M = \begin{pmatrix} a - b & 2a \\ -4a & 5b \end{pmatrix}$$

   a et b étant deux réels quelconques, est un espace vectoriel.
8. $Vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ et $vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ sont en somme directe.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ? si oui, donnez une base de chaque espace propre.
4. Calculer A^{10}.