ALGÈBRE
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

October 30, 2008

Table des Matières

Chapitre 3

Diagonalisation des endomorphismes

3-1 Exercices corrigés

3-1.1 Exercice 8a. - Méthode du pivot de Gauss

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{r} x-2y+4z=4 \\ 3x-4y+2z=4 \\ 4x+y-4z=-1 \end{array}\right.$

2. En utilisant les matrices, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{r} 2ax-y+2z=0 \\ 2x-ay+2z=-4 \\ 3x+y-az=1 \end{array}\right.$

   où a est un paramètre réel.

Corrigé :

1. La première équation sert de pivot :

$$\left\{\begin{array}{rl} x-2y+4z=4 & (E_1) \\ 3x-4y+2z=4 & (E_2) \\ 4x+y-4z=-1 & (E_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-2y+4z=4 & (E_1) \\ 2y-10z=-8 & (E_2-3E_1) \\ 9y-20z=-17 & (E_3-4E_1) \end{array}\right.$$

   La deuxième équation sert à présent de pivot :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-2y+4z=4 & (E_1) \\ 2y-10z=-8 & (E_2) \\ 5y=-1 & (E_3-2E_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=28/50 \\ y=-10/50 \\ z=38/50 \end{array}\right.$$

2. Le système proposé s'écrit : $\begin{pmatrix} 2a & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -a & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$ ce qui est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2-1 & 2(1-a) & 4a \\ 2 & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1+\frac{3}{2}a & -a-3 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1' \longleftarrow L_1-aL_2 \\ L_2' \longleftarrow L_2 \\ L_3' \longleftarrow L_3-\frac{3}{2}L_2 \end{array} \quad \text{la ligne 2 sert de pivot.}$$

- Si $a^2-1 \neq 0$ alors le système devient

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2-1 & 2(1-a) & 4a \\ 2 & -a & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -a-3+\frac{2+3a}{a+1} & 7+4a\times\frac{1+3a/2}{1-a^2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} L_1' \\ L_2' \\ L_3'' \longleftarrow L_3'-\frac{1+3a/2}{-1+a^2}L_1' \end{array}$$

  On obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2-1 & 2(1-a) & 4a \\ 2 & -a & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2+a+1}{a+1} & \frac{7-a^2+4a}{1-a^2} \end{pmatrix}$$

d'où le système triangulaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} (a^2-1)\,y+2\,(1-a)\,z=4a \\ 2x-ay+2z=-4 \\ -\frac{a^2+a+1}{a+1}z=\frac{7-a^2+4a}{1-a^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (a^2-1)\,y+2\,(1-a)\,\frac{7-a^2+4a}{a^3-1}=4a \\ 2x-ay+2\frac{7-a^2+4a}{a^3-1}=-4 \\ z=\frac{7-a^2+4a}{a^3-1} \end{array}\right.$$

On obtient finalement :

$$\left\{\begin{array}{c} y=\frac{4a^2-2a+14}{a^3-1} \\ x=\frac{3a-5}{a^3-1} \\ z=\frac{7-a^2+4a}{a^3-1} \end{array}\right.$$

- Si $a=1$ alors le système devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5/2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ système incompatible, la 1ère ligne donne $0=4$. Il n'y a pas de solutions.
- Si $a=-1$ alors le système devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ système compatible, la solution est : $\begin{pmatrix} x=4 \\ z=-1 \\ y=-10 \end{pmatrix}$

3-1.2 Exercice 9a. Diagonalisation, triangularisation.

Soit $\{\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit u l'endomorphisme dont $\mathbf{A}$ est la matrice dans la base $\{\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3\}$.

Dans les trois cas suivants , u est-il diagonalisable ?

Si oui , déterminer une base $\{\widetilde{\mathbf{e}}_1;\widetilde{\mathbf{e}}_2;\widetilde{\mathbf{e}}_3\}$ dans laquelle la matrice de u est diagonale . Sinon peut-on trigonaliser u ?

Déterminer $\mathbf{P}$ la matrice de passage de $\{\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3\}$ à $\{\widetilde{\mathbf{e}}_1;\widetilde{\mathbf{e}}_2;\widetilde{\mathbf{e}}_3\}$ et $\mathbf{P}^{-1}$ la matrice de passage de $\{\widetilde{\mathbf{e}}_1;\widetilde{\mathbf{e}}_2;\widetilde{\mathbf{e}}_3\}$ à $\{\mathbf{e}_1;\mathbf{e}_2;\mathbf{e}_3\}$

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Corrigé :

a) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est :

$$P_u(\lambda)=\det\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\,[(\lambda+4)\,(\lambda-5)+24]+4\,[-6+\lambda+4]$$

Donc

$$P_u(\lambda)=-\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)$$

A a trois valeurs propres distinctes : 0, 1 et 2.
$\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, on en déduit que **A** est diagonalisable : chaque espace propre est de dimension 1.
Déterminons les espaces propres associés à chaque valeur propre (il s'agit de trois droites vectorielles) :

Pour $\lambda = 1$, résolvons $\mathbf{Au} = 1\mathbf{u}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -4z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \right.$
donc $V_u(1) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Pour $\lambda = 2$, résolvons $\mathbf{Au} = 2\mathbf{u}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2y \\ y = y \\ z = 0 \end{array} \right.$
donc $V_u(2) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Pour $\lambda = 0$, résolvons $\mathbf{Au} = 0\mathbf{u}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -2z \\ y = \frac{3}{2}z \\ z = z \end{array} \right.$
donc $V_u(0) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

avec : $P = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Dans la base formée de vecteurs propres $\left\{\widetilde{\mathbf{e}}_1\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\widetilde{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\widetilde{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$la matrice de u est : $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Le polynôme caractéristique de **A** est :

$$P_u(\lambda) = \det\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Donc

$$P_u(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

A a deux valeurs propres distinctes. Déterminons les espaces propres.:

Pour $\lambda = 1$, résolvons $\mathbf{Au} = 1\mathbf{u}$ soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$$

donc $V_u(1) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Pour $\lambda = -2$, résolvons $\mathbf{Au} = -2\mathbf{u}$ soit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

donc $V_u(-2) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

La dimension des espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres donc A est diagonalisable .

avec : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Dans la base formée de vecteurs propres $\left\{ \widetilde{\mathbf{e}}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \widetilde{\mathbf{e}}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \widetilde{\mathbf{e}}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la matrice est : $\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est :

$$P_u(\lambda) = \det \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+4)\left[(1-\lambda)(3-v)\right] + 5 \times 2\,(1-\lambda)$$

Donc

$$P_u(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

$\mathbf{A}$ a deux valeurs propres distinctes. Déterminons les espaces propres.:

Pour $\lambda = 1$, résolvons $\mathbf{Au} = 1\mathbf{u}$ soit

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{5} z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

donc $V_u(1) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

Pour $\lambda = -2$, résolvons $\mathbf{Au} = -2\mathbf{u}$ soit

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

donc $V_u(-2) = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La dimension des espaces propres n'est pas égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres donc A est n'est pas diagonalisable.

Mais A ayant un polynôme caractéristique scindé (c'est à dire factorisable en facteurs du premier degré) alors A est trigonalisable. Complétons la famille de vecteurs propres pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminons l'écriture de $\mathbf{A}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, il suffit d'écrire l'image de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par $\mathbf{A}$ dans cette base .

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On cherche donc $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tels que

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \beta = 13/3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$.

Dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ La matrice de u s'écrit donc : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -2 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est bien triangulaire.

3-1.3 Exercice 10a. Diagonalisation.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. En déduire les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ admet une valeur propre double si et seulement si $a = 0$ ou $a = -2$.
3. Préciser dans les deux cas précédents si $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
4. Dans le cas $a = -2$, déterminer une base de chaque espace propre.

Corrigé :

1. Le polynôme caractéristique est :

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & a-X & 1 \\ 0 & -3 & a+4-X \end{vmatrix} = (1-X)[(a-X)(a+4-X)+3]$$

   Donc :

$$P_f(X) = (1-X)(X-a-1)(X-a-3)$$

   Le polynôme caractéristique a trois racines : 1 ; $a+1$; $a+3$.

2. Trois cas sont possibles :

   a) Si $a = 0$ alors $\mathbf{A}$ a deux valeurs propres : 1 de multiplicité 2, et 3 de multiplicité 1.

   b) Si $a = -2$ alors $\mathbf{A}$ a deux valeurs propres : 1 de multiplicité 2, et -1 de multiplicité 1

   c) Si $a \neq 0$ et $a \neq (-2)$ alors $\mathbf{A}$ a trois valeurs propres simples : 1 ; $a+1$; $a+3$. $\mathbf{A}$ est donc diagonalisable.

3. Dans les cas a) et b), pour savoir si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, il suffit de vérifier que la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres dans le polynôme caractéristique.
   Pour cela il suffit de déterminer le rang de $\mathbf{A} - Id_E$

   Cas a):

$$rang\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = rang \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

   Donc $dim\ E_1 = 2$. Et 2 est égal à la multiplicité de la valeur propre 1. L'autre valeur propre étant simple, l'espace propre associé est de dimension 1. $\mathbf{A}$ est donc diagonalisable.

   Cas b):

$$rang\ (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = rang \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc $dim\ E_1 = 2$. Et 2 est égal à la multiplicité de la valeur propre 1. L'autre valeur propre étant simple, l'espace propre associé est de dimension 1. **A** est donc diagonalisable.

4. Dans le cas b) déterminons une base de chaque espace propre.
   Pour E_1
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$$
   Donc $E_1 = \mathsf{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
   Pour E_{-1}
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$
   Une base de E_{-1} est donc : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3-2 Exercices avec indications seulement

3-2.1 Exercice 8b. Méthode du pivot de Gauss.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{c} 5x+2y-4z=4 \\ x-10y+2z=3 \\ y-4z=6 \end{array}\right.$

2. En utilisant les matrices, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{c} x-2by+2z=0 \\ 2x-3y+bz=-4 \\ 3x+by-z=1 \end{array}\right.$

   où b est un paramètre réel.

Indications :

1. La solution est $\left(\begin{array}{c} x=64/97 \\ y=-63/2*97 \\ z=-29/97 \end{array}\right)$

2. La solution est : si $b^2 \neq 3$: $x=2/7$, $y=\frac{1}{7}\left(\frac{b-32}{b^2-3}\right)$, $\quad z=\frac{1}{7}\left(\frac{32b-3}{b^2-3}\right)$

3-2.2 Exercice 9b. Diagonalisation - triangularisation.

a et b étant deux réels non nuls, on considère la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ associée à un endomorphisme f.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.

2. Pour quelles valeurs du couple (a,b) $\mathbf{A}$ admet- elle une valeur propre double et une valeur propre simple ?

   Préciser ces valeurs propres dans chaque cas.

3. En déduire les couples (a,b) pour lesquels $\mathbf{A}$ est trigonalisable et non diaganalisable.

4. Ecrire la forme trigonalisée de $\mathbf{A}$ ainsi que la matrice de passage $\mathbf{P}$ dans les cas suivants :

1er cas : $a=1$; $b=-2$.
2ème cas : $a=1$; $b=1$

Indications :

1. Le polynôme caractéristique est : $(X - a - b)(X + a)(X + b)$
2. On aura une valeur propre double et une simple si et seulement si : $a = b$ ou $b = -2a$ ou $a = -2b$
3. Chercher une base de chaque espace propre, ici, chacun est de dimension 1 Fabriquer une base de $\mathbb{R}^3$ utilisant les bases précédentes, écrire la matrice dans cette base.

3-2.3 Exercice 10b. Application de la diagonalisation.

Soient x et y deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, de variable t.

On veut résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$$

1. En introduisant les vecteurs : $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ montrer que le système se met sous la forme : $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ où $\mathbf{A}$ est une matrice que vous déterminerez.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable. Déterminer la matrice $\mathbf{P}$ et la matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$. Montrer que l'équation différentielle s'écrit alors : $\mathbf{P^{-1}X'} = \mathbf{DP^{-1}X}$
3. Vérifier que : $(\mathbf{P^{-1}X})' = \mathbf{P^{-1}X'}$
4. En effectuant le changement de variable : $\mathbf{Y} = \mathbf{P^{-1}X}$ Montrer que l'équation différentielle s'écrit alors : $\mathbf{Y'} = \mathbf{DY}$.
5. En posant : $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, résoudre le système : $\mathbf{Y'} = \mathbf{DY}$; en déduire les solutions du système initial.

Indications :

Il suffit de suivre les indications de l'exercice.

Le système s'écrit :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le nouveau système s'écrit après changement d'inconnue :

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Le système s'écrit alors:

$$\begin{cases} u' = 2u \\ v' = 3v \end{cases}$$

Une fois obtenu Y il suffit de multiplier par P pour retrouver $X = PY$

3-3 Devoir à rendre

3-3.1 Exercice 8c. Méthode du pivot de Gauss

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{c} x+ay+a^2z=a^2 \\ ax+y+az=a^2+a-1 \\ 2x+ay+az=2a \end{array}\right.$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{c} 2x+by=2b^2-2b \\ bx+2y=4b-b^2 \end{array}\right.$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{c} x+3y+2z=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ 3x-5y+4z=-8 \end{array}\right.$

3-3.2 Exercice 9c. Application de la diagonalisation.

1. Déterminer les éléments propres de la matrice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. **A** est -elle diagonalisable? Si oui déterminer une base de vecteurs dans laquelle **A** est diagonalisable.

Ecrire la forme diagonale de **A**.
En déduire $\mathbf{A}^n$ pour n entier naturel

3-3.3 Exercice 10c. Diagonalisation et inversion de matrice.

Soit la matrice A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ? Montrer que A est diagonalisable.

2. Montrer que A est inversible, calculer son inverse.

3. Y-a-t-il un lien entre les valeurs propres de A et celles de A^{-1}.

4. Etudier la limite de la suite de terme général $u_n = A^n$