ALGÈBRE
PAD - Exercices

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

October 30, 2008

Table des Matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels – Applications linéaires

1-1 Exercices corrigés

1-1.1 Exercice 1a - Structure d'espace vectoriel

1. Prouver que $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ est un groupe abélien ("$\cdot$" est la multiplication habituelle, il faut vérifier que "$\cdot$" est interne et vérifie les propriétés (C) (A) (N) (S)).

2. On définit dans $\mathbb{R}^{+*}$ une loi externe, notée $*$, de la façon suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\text{ et }\; \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \alpha * x = x^{\alpha}\,.$$

   Montrer que $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot, *)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que tout élément $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ engendre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot, *)$.

Corrigé

1. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On a : $(x \cdot y) \in \mathbb{R}^{+*}$ $(x.y > 0)$, et la loi "$\cdot$" est donc interne.

   La loi "$\cdot$" est (de manière évidente) commutative et associative dans $\mathbb{R}^{+*}$.

   Il est clair que 1 est élément neutre, car en effet : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\; x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

   On a aussi, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\; \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{+*}$, et $\frac{1}{x}$ est l'élément symétrique de x, puisque

$$\frac{1}{x} \cdot x = x \cdot \frac{1}{x} = 1\,.$$

   En conclusion, $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ est un groupe abélien.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. On vérifie aisément les quatre propriétés suivantes :

   (a) $a * (x \cdot y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = (a * x) \cdot (a * y)$.

   (b) $(a + b) * x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = (a * x) \cdot (b * x)$ (attention, la loi interne du groupe $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot)$ n'est pas la même que la première loi du corps de référence $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

   (c) $a * (b * x) = a * (x^b) = (x^b)^a = x^{ab} = (ab) * x$.

   (d) $1 * x = x^1 = x$.

   Ainsi, $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot, *)$ est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Pour prouver que tout élément $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ engendre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot, *)$, il faut montrer que tout élément x de $\mathbb{R}^{+*}$ s'exprime linéairement en fonction de a, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\text{ tel que }\; x = \lambda * a\,.$$

   Or

$$x = \lambda * a \Leftrightarrow x = a^{\lambda} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\lambda \ln a} \Leftrightarrow \ln x = \lambda \ln a\,.$$

   Donc pour $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on peut écrire

$$x = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = \left(\tfrac{\ln x}{\ln a}\right) * a\,,$$

d'où on peut conclure que tout élément $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ engendre $(\mathbb{R}^{+*}, \cdot, *)$.

1-1.2 Exercice 2a - Base d'un espace vectoriel

Dans l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels, et de degré inférieur ou égal à 2, on définit une loi de composition interne, notée $+$, et une loi de composition externe notée $\cdot$, telles que :

$$\forall P,\, Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} (P+Q)(X) = P(X) + Q(X) \\ (\lambda \cdot P)(X) = \lambda P(X)\,. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$, muni de ces deux lois, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient P_1, P_2, P_3 les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :
$$P_1(X) = 1,\ P_2(X) = X,\ P_3(X) = X^2.$$
Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (qui est d'ailleurs appelée base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$).
3. Soient F_1, F_2, F_3 les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par :
$$F_1(X) = X + 1,\ F_2(X) = 2X^2,\ F_3(X) = X + X^2.$$
   (a) Montrer que $\{F_1, F_2, F_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer dans cette base les coordonnées des polynômes Q et R définis par :
$$Q(X) = 12 \ \text{ et }\ R(X) = 3X^2 - 2X + 1.$$

Corrigé

1. Les propriétés de l'addition des réels nous permettent d'écrire :
$$(P+Q)(X) = P(X) + Q(X) = Q(X) + P(X) = (Q+P)(X)\,,$$
et
$$\begin{aligned}\left[(P+Q)+M\right](X) &= (P+Q)(X) + M(X) = P(X) + Q(X) + M(X) \\ &= P(X) + (Q+M)(X) = \left[P + (Q+M)\right](X)\,.\end{aligned}$$
Le polynôme nul $\mathbf{0}$ est élément neutre.
Le polynôme, noté $(-P)$, de coefficients $-a, -b, -c$ est l'élément symétrique du polynôme P de coefficients a, b, c.
$(\mathbb{R}_2[X], +)$ est donc un groupe commutatif.

Soient P et Q éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, on vérifie les quatre propriétés suivantes :

(a) $$\begin{aligned}(\lambda.(P+Q))(X) = \lambda(P(X)+Q(X)) &= \lambda P(X) + \lambda Q(X)\\ &= (\lambda.P)(X) + (\lambda.Q)(X)\,.\end{aligned}$$

(b) $((\lambda+\mu).P)(X) = (\lambda+\mu)P(X) = \lambda P(X) + \mu P(X) = (\lambda.P)(X) + (\mu.P)(X)$.

(c) $(\lambda.(\mu.P))(X) = \lambda(\mu.P)(X) = \lambda\mu P(X) = (\lambda\mu.P)(X)$.

(d) $(1.P)(X) = P(X)$.

L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$, muni de ces deux lois, est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. P étant un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe trois réels a, b, c tels que, pour $X \in \mathbb{R}$, on puisse écrire :

$$P(X) = aX^2 + bX + c \text{ soit } P = aP_3 + bP_2 + cP_1\,.$$

La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus, cette famille est libre. En effet, $aP_3 + bP_2 + cP_1 = 0$ si et seulement si :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ aX^2 + bX + c = 0\,,$$

c'est à dire :

$$a = b = c = 0.$$

$\{P_1, P_2, P_3\}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. (a) L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ étant de de dimension 3, il suffit alors de montrer que $\{F_1, F_2, F_3\}$ est une famille libre pour pouvoir affirmer que c'est bien une base.

Soient trois réels a, b, et c, tels que :

$$aF_1 + bF_2 + cF_3 = \mathbf{0}\,.$$

On a donc :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ a(X+1) + 2bX^2 + c(X+X^2) = 0\,,$$

ou encore :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ (2b+c)X^2 + (a+c)X + a = 0\,.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} 2b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a = 0\,, \end{cases}$$

qui équivaut à : $a = b = c = 0$.

Ainsi $\{F_1, F_2, F_3\}$ est une famille libre, et c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Soient α, β, et γ, les coordonnées de Q dans la base $\{F_1, F_2, F_3\}$.
On peut donc écrire :

$$Q(X) = \alpha(X+1) + 2\beta X^2 + \gamma(X + X^2) = (2\beta + \gamma)X^2 + (\alpha + \gamma)X + \alpha\,.$$

Or les coordonnées de Q dans la base canonique sont $(0, 0, 12)$. On en déduit :

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha = 12\,, \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = 6 \\ \gamma = -12\,. \end{cases}$$

Les coordonnées de Q dans la base $\{F_1, F_2, F_3\}$ sont donc : $(12, 6, -12)$.

De même pour R, on obtient :

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \gamma = -2 \\ \alpha = 1\,, \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -3\,. \end{cases}$$

Les coordonnées de R dans la base $\{F_1, F_2, F_3\}$ sont donc : $(1, 3, -3)$.

1-1.3 Exercice 3a - Matrice d'une application linéaire

Dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f((x, y, z)) = (x', y', z') \text{ avec } \begin{cases} x' = 3x - 5y + 3z \\ y' = 2x - 4y + z \\ z' = x - 2y\,. \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice $\mathbf{A}$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. On définit :

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\,.$$

(a) Montrer que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice $\mathbf{B}$ de f dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

Corrigé

1. On obtient naturellement :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre. A cet égard, on a :

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \alpha(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \beta(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \gamma(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (2\alpha - \beta - \gamma)\mathbf{e}_1 + (\alpha - \beta)\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

ce qui, puisque $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, impose que :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \gamma = 0\,, \end{cases}$$

c'est à dire : $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi :

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

et la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est donc libre. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculons les coordonnées de $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$, et $f(\mathbf{w})$, dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
Les coordonnées de $f(\mathbf{u})$ dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $f(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1$.
Les coordonnées de $f(\mathbf{v})$ dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Les coordonnées de $f(\mathbf{w})$ dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d'où $f(\mathbf{w}) = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

Enfin, à partir du système

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{w} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \,, \end{cases}$$

on exprime $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en fonction de $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. On obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} \,, \end{cases}$$

et finalement on a :

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\,, \qquad f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}\,, \qquad \text{et} \qquad f(\mathbf{w}) = \mathbf{v} - \mathbf{w}\,.$$

La matrice $\mathbf{B}$ de f dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est donc :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1-1.4 Exercice 4a - Image et noyau d'une application

Soit f l'application définie par :

$$f \,:\, \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Trouver une base de $\mathit{Im}\, f$ et de $\mathit{Ker}\, f$.
3. Déterminer le réel k tel que $f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f$ (k fois), soit colinéaire à f.
4. Simplifier f^{49}.
5. Retrouver ce qui précède en utilisant une matrice.

Corrigé

Montrons que f est linéaire. Quels que soient deux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, et quel que soit le réel λ, on a :

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' \\ \lambda b + b' \\ \lambda c + c' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a + a' - (\lambda b + b') \\ \lambda b + b' - (\lambda c + c') \\ \lambda c + c' - (\lambda a + a') \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right)=\lambda\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'-b'\\b'-c'\\c'-a'\end{pmatrix}=\lambda f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right)$$

f est donc une application linéaire.

Cherchons $\mathit{Im}\, f$:

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ainsi

$$\mathit{Im}\, f=\mathit{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

en remarquant que la somme de ces trois vecteurs est nulle, on déduit que cette famille est liée et qu'une base de $\mathit{Im}\, f$ est:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

(Ces deux vecteurs sont indépendants).

$\mathit{Ker}\, f$ est l'ensemble des vecteurs ayant pour image $\mathbf{0}$ par f :

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=b=c$$

d'où

$$\mathit{Ker}\, f=\mathit{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Calculons les différentes puissances de f.

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-a\end{pmatrix}$$

$$f^2\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c-a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a-2b+c\\b-2c+a\\c-2a+b\end{pmatrix}$$

$$f^3\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}a-2b+c\\b-2c+a\\c-2a+b\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3b+3c\\-3c+3a\\-3a+3b\end{pmatrix}$$

$$f^4\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} -3b+3c \\ -3c+3a \\ -3a+3b \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} -a+2c-b \\ 2a-b-c \\ -a+2b-c \end{pmatrix}$$

$$f^5\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f\left(3\begin{pmatrix} -a+2c-b \\ 2a-b-c \\ -a+2b-c \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 3c-3a \\ 3a-3b \\ 3b-3c \end{pmatrix}$$

$$f^6\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f\left(3\begin{pmatrix} 3c-3a \\ 3a-3b \\ 3b-3c \end{pmatrix}\right) = 9\begin{pmatrix} c-2a+b \\ a-2b+c \\ b-2c+a \end{pmatrix}$$

$$f^7\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f\left(9\begin{pmatrix} c-2a+b \\ a-2b+c \\ b-2c+a \end{pmatrix}\right) = 9\begin{pmatrix} -3a+3b \\ -3b+3c \\ -3c+3a \end{pmatrix} = (\text{-}3)^3 f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$f^7 = -27f$$

donc :

$$\left(f^7\right)^7 = (-27f)^7 = -27^7\left(f^7\right) = 27^8 f$$

Matriciellement, la matrice de f est :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a,:

$$\mathbf{A}^7 = -27\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-2 Exercices avec indications seulement

1-2.1 Exercice 1b - Somme directe - Application linéaire

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit F l'ensemble des polynômes de E, factorisables par $(X-1)$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E. Déterminer une base de F et sa dimension.

2. Déterminer un sous espace vectoriel G de E tel que E soit somme directe de F et de G.

3. Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ définie de la façon suivante :
   Pour tout polynôme P de E : $f(P) = (P(1)\ ;\ P'(1))$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer $\mathit{Ker} f$.

   (c) Dans des bases que vous choisirez et indiquerez, écrire la matrice de f.

   (d) Déterminer une base et la dimension de $\mathit{Im} f$.

Indications

1. Il faut vérifier que :

   - F est non vide.
   - P et P_1 étant deux élements quelconques de F et a un réel quelconque, $P+aP_1$ appartient à F.

2. Noter que tout polynôme P de E s'écrit : $P = (X-1)Q + P(1)$.

3. Pour tout polynôme P de E : $f(P) = (P(1)\ ;\ P'(1))$

   (a) Vérifier qu'étant donnés deux éléments quelconques P et P_1 de E et a un réel quelconque on a : $f(P + aP_1) = f(P) + af(P_1)$.

   (b) Vérifier que, P étant un polynôme de F, si 1 est racine de P', alors P est factorisable par $(X-1)^2$.

   (c) On peut choisir $\{1, (X-1), (X-1)^2, \dots (X-1)^n\}$ comme base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il faut ensuite discuter suivant les valeurs de n. (Noter que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n+1$)

1-2.2 Exercice 2b - Base d'un espace vectoriel

Dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, on considère les vecteurs : $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, -1, 2)$, et $\mathbf{w} = (1, -2, 3)$.

1. La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est-elle libre ?

2. On note $F = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Déterminer une base de F.

3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer une base ainsi que la dimension de G.

5. Prouver que $F = G$.

Indications

1. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = (0, 0, 0)\,.$$

   Pour que la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ soit libre, il faut prouver que le système ainsi obtenu admet pour solution unique : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   Remarque : On peut éviter des calculs en exprimant $\mathbf{v}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$. On en déduit alors que la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ n'est pas libre.

2. La réponse à la question précédente permet de déterminer une base du vectorialisé de $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

3. Montrer que G n'est pas vide. Puis montrer que α et β étant deux réels, (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de G, alors on a :

$$\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in G$$

   (stabilité par combinaison linéaire).

4. A partir de l'égalité $x + 2y + z = 0$, on exprime (par exemple) z en fonction de x et y. Chaque vecteur de G peut alors s'écrire sous la forme : $(x, y, -x - 2y)$, ce qui permet aisément de trouver une base de G.

5. Prouver que $F \subset G$ et $G \subset F$.

1-2.3 Exercice 3b - Matrice d'une application linéaire

Soit λ une constante réelle et f l'application de $\mathbb{R}^3$, de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, dans $\mathbb{R}^2$, de base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (\lambda x + y, y + \lambda z) .$$

1. Montrer que, quel que soit le réel λ donné, f est une application linéaire.
2. Ecrire la matrice $\mathbf{A}$ de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. (a) On définit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $T = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) On définit dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $U = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Ecrire la matrice $\widetilde{\mathbf{A}}$ de l'application f dans les bases T et U.

Indications

1. Il faut prouver que quels que soient $\mathbf{u} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (x', y', z')$, éléments de $\mathbb{R}^3$, et quel que soit le réel μ :

$$f(\mu \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mu f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) .$$

   Il faut donc calculer $f(\mu x + x', \mu y + y', \mu z + z')$.

2. On exprime $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ et $f(\mathbf{e}_3)$ dans la base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. On trouve :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. (a) $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. $T = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre.

   (b) $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. $U = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est une famille libre.

   (c) Il faut calculer les coordonnées de $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$, et $f(\mathbf{w})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base $U = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. On trouve :

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2} & 2 + \frac{\lambda}{2} & 1 - \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}.$$

1-2.4 Exercice 4b - Image et noyau d'une application

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les coordonnées de $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, et $f(\mathbf{e}_3)$, dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, calculer $f(\mathbf{u})$. Déterminer $\mathit{Ker}\, f$ et $\mathit{Im}\, f$.
3. Vérifier que $\mathit{Ker}\, f \oplus \mathit{Im}\, f = \mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans une base formée de vecteurs de $\mathit{Ker}\, f$ et $\mathit{Im}\, f$.

Indications

$$\mathit{Im}\, f = \mathit{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathit{Ker}\, f = \mathit{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Dans cette base, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-3 Devoir à rendre

1-3.1 Exercice 1c - Sous espaces vectoriels supplémentaires

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{array}{l} x+z=0 \\ y-2t=0 \end{array} \right. \right\}$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base et la dimension.

2. Etant donné un réel a, on appelle F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \mathit{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

   Les sous espaces E et F sont-ils supplémentaires ?

1-3.2 Exercice 2c - Base d'un espace vectoriel

Dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ on considère les vecteurs :

$$\mathbf{u} = (2,1,0)\,, \quad \mathbf{v} = (-1,0,1)\,, \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = (4,1,-2)\,.$$

1. On note $E_1 = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Déterminer une base ainsi que la dimension de E_1. Ecrire la forme générale d'un vecteur de E_1.

2. Soit $E_2 = \{(0, \alpha+\beta, -\beta) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Montrer que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera la dimension et une base.

   (b) Déterminer une base ainsi que la dimension de $E_1 + E_2$.

   (c) Exprimer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base de $E_1 + E_2$.

1-3.3 Exercice 3c - Matrice d'une application linéaire

1. $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Montrer que les vecteurs :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{R}^4$ est muni de la base canonique. On définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par :

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer :

   (a) la matrice $\mathbf{A}$ représentant f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$,

   (b) la matrice $\mathbf{A}'$ représentant f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique,

   (c) l'image d'un vecteur quelconque $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1-3.4 Exercice 4c - Image et noyau d'une application

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux. Soient $\mathbf{e}_1(x) = 1$, $\mathbf{e}_2(x) = 1 + x$, et $\mathbf{e}_3(x) = 1 - x^2$.

1. Montrer que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini pour tout polynôme P par :

$$f(P) = (2 - x^2)P' + 2xP\,.$$

   Trouver une base de $\mathit{Im}\, f$ et de $\mathit{Ker}\, f$.

3. Citer et vérifier le théorème du rang .