Chapitre 3

Diagonalisation des endomorphismes

CORRIGÉS DES EXERCICES

3-2 Correction des exercices de la série 3-2

3-2.1 Exercice 8b - Méthode du pivot de Gauss.

1. $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -10 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\Leftrightarrow}{\textit{la ligne 1 sert de pivot}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -52 & 14 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}_{L_2 \leftarrow 5L_2 - L_1}$$

$$\underset{\Leftrightarrow}{\textit{la ligne 2 sert de pivot}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -52 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & -194 & 323 \end{pmatrix}_{L_3 \leftarrow 52L_3 + L_2}$$

On obtient : $\begin{cases} x = -\frac{26}{97} \\ y = -\frac{64}{97} \\ z = -\frac{323}{194} \end{cases}$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -2b & 2 & 0 \\ 2 & -3 & b & -4 \\ 3 & b & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\Leftrightarrow}{\textit{la ligne 3 sert de pivot}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 2 \\ 2+3b & b^2-3 & 0 & b-4 \\ 3 & b & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + bL_3 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ (b^2-3)\, y = b - 4 - \frac{2}{7}(2+3b) \\ z = \frac{6}{7} + by - 1 \end{cases}$$

a) Si $(b^2-3) \neq 0$ alors on obtient : $\begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = -\frac{b-32}{7(b^2-3)} \\ z = -\frac{3-32b}{7(b^2-3)} \end{cases}$

b) Si $b = \sqrt{3}$ alors on obtient : $\begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ 0 = \frac{\sqrt{3}-32}{7} \\ z = \frac{6}{7} + by - 1 \end{cases}$ système qui n'admet pas de solution.

c) Si $b = -\sqrt{3}$ alors on obtient : $\begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ 0 = \frac{-\sqrt{3}-32}{7} \\ z = \frac{6}{7} + by - 1 \end{cases}$ système qui n'admet pas de solution

3-2.2 Exercice 9b. Diagonalisation - Triangularisation.

1. Le polynome caractéristique est :

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} -X & a & b \\ a & -X & b \\ a & b & -X \end{vmatrix} \underset{\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.}{=} \begin{vmatrix} -X & a & b \\ a+X & -X-a & 0 \\ 0 & X+b & -X-b \end{vmatrix}$$

On met en facteur $X + a$ et $X + b$ dans les lignes 2 et 3, on obtient :

$$P_f(X) = (a + X)(X + b) \begin{vmatrix} -X & a & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Et donc : $P_f(X) = (a + X)(X + b)(-X + a + b)$

2. Les racines du polynome sont $-a$; $-b$; $a + b$.

- 1er Cas : si $-a$; $-b$; $a + b$ sont tous distincts, alors il y a trois valeurs propres distinctes dans $E = \mathbb{R}^3$. Et $\dim E = 3$, donc par théorème, f est diagonalisable.
- 2ème Cas : si $-a = -b$ (soit $a = b$) et différent de $a + b$ (soit a, b différents de 0), il y a deux valeurs propres distinctes, l'une double $-a$ l'autre simple $a + b = 2a$. Ainsi : $P_f(X) = (X + a)^2 (-X + 2a)$.

Déterminons les espaces propres respectifs :

Pour la valeur propre double a, Résolvons $f(u) = -au$ avec $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow a(x + y + z) = 0$$

or $a \neq 0$ donc :

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à $(-a)$ est : $E_{-a} = vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ qui est de dimension 2.

Pour la valeur propre simple $2a$, Résolvons $f(u) = 2au$ avec $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ay + az = 2ax \\ ax + az = 2ay \\ ax + ay = 2az \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z$$

donc :

$$u\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à $2a$ est : $E_{2a} = vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$qui est de dimension 1.

Le polynome caractéristique est scindé, la dimension des espaces propres est égal à la multiplicité des valeurs propres respectives donc f est diagonalisable.

- 3ème Cas : si $-a = a+b$ (soit $-2a = b$) et différent de $-b$ (soit $a \neq b$), il y a deux valeurs propres distinctes, l'une double $-a$, l'autre simple $2a$.

Déterminons les espaces propres respectifs:

Pour la valeur propre double $-a$, Résolvons $f(u) = -au$ avec $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 2a \\ a & 0 & 2a \\ a & 2a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ay + 2az = -ax \\ ax + 2az = -ay \\ ax + 2ay = -az \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

or

$$u\begin{pmatrix} -3z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'espace propre associé à $-a$ est: $E_{-a} = vect\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$qui est de dimension 1.

Le polynome caractéristique est scindé, la dimension de l'espace propre E_{-a} n' est égal pas à la multiplicité de la valeur propre $-a$ donc f n'est pas diagonalisable.

- 4ème Cas:

Si $-b = a+b$ (soit $a = -2b$) et différent de $-a$ (soit $a \neq b$), il y a deux valeurs propres distinctes, l'une double $-b$ l'autre simple $2b$. On retrouve le cas précédent en échangeant le role de a et b.

Dans ce cas f n'est pas diagonalisable.

3. BILAN : Les couples cherchés (a, b) tels que A soit trigonalisable sans que A soit diagonalisable sont tels que : $b = -2a$ ou $a = -2b$.

4. Traitons deux cas particuliers:

- $a = 1$et $b = -2$. C'est le 3ème cas.

A a une valeur propre double : -1 et une simple : 2 .

$$E_{-1} = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Complétons la famille libre $\mathbf{e}'_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}'_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ par $\mathbf{e}'_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dans cette base, la matrice de f est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage est :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $a = 1$et $b = 1$. C'est le 2ème cas.

on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **A** une valeur propre double : -1 et une simple : 2 .

$$E_{-1} = vect\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 \; , & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\mathbf{e}'_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}'_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e}'_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme associé à **A** s'écrira :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3-2.3 Exercice 10b. Application de la diagonalisation.

1. Le système s'écrit :

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

2. Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   Calculons le polynôme caractéristique :
   $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$
   $\mathbf{A}$ admet deux valeurs propres distinctes (2 et 3). $\mathbb{R}^2$ étant de dimension 2, on peut conclure que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
   Cherchons les espaces propres associés à chaque valeur propre.
   Pour $\lambda = 2$, resolvons $\mathbf{Au} = 2\mathbf{u}$, soit
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$
   Donc $E_2 = \mathit{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   Pour $\lambda = 3$, resolvons $\mathbf{Au} = 3\mathbf{u}$, soit
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$
   Donc $E_3 = \mathit{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   Et l'on peut écrire :
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   Le système s'écrit donc : $\mathbf{X}' = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$
   Soit $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$
   Finalement : $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$

3. On obtient facilement : $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Donc
   $$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X})' = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x - y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2x' + y' \\ -x' - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}'$$

4. Donc : $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X})' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$
   Le nouveau système s'écrit après changement d'inconnue :
   $$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{Y}$$

5. Le système s'écrit alors : $\left\{ \begin{array}{l} u' = 2u \\ v' = 3v \end{array} \right.$
   Donc $\left\{ \begin{array}{l} u = C_1 e^{2t} \\ v = C_2 e^{3t} \end{array} \right.$ et donc $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$
   Il suffit de multiplier par $\mathbf{P}$ pour retrouver $\mathbf{X} = \mathbf{PY}$:
   $$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$
   Donc :
   $$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} \end{array} \right.$$