

Chapitre 2

Matrices – Changement de base

CORRIGÉS DES EXERCICES

2-2 Correction des exercices de la série 2-2

2-2.1 Exercice 5b - Changement de bases

Dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, f a pour matrice : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

1. Soient les vecteurs : $\mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculons les coordonnées des images de ces vecteurs dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$ en utilisant le calcul matriciel :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{De même : } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} ; \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ecrivons ces vecteurs dans la base $(\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k})$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + c \\ 2 = 2a + b + c \\ 2 = a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/2 \\ c = 5/2 \end{cases}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = a + c \\ -5 = 2a + b + c \\ 6 = a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3/2 \\ b = -9/2 \\ c = -7/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + c \\ 1 = 2a + b + c \\ 4 = a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Ainsi, l'écriture de la matrice de f dans la base $(\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k})$ est :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 2 \\ -3/2 & -9/2 & -2 \\ 5/2 & -7/2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On peut obtenir $\mathbf{A}'$ par un produit matriciel ce qui correspond exactement aux calculs précédents sous forme matricielle. Appelons $\mathbf{P}$ la matrice de passage de la

$$\text{base } \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\} \text{ à la base } (\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}) : \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2-2.2 Exercice 6b - Déterminants

$$1. D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 & d^2-c^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-b^3 & d^3-c^3 \end{vmatrix} \begin{cases} c_2 \leftarrow c_2 - c_1 \\ c_3 \leftarrow c_3 - c_2 \\ c_4 \leftarrow c_4 - c_3 \end{cases}$$

On développe suivant la première ligne, on obtient :

$$D_1 = 1 \begin{vmatrix} b-a & c-b & d-c \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 & d^2-c^2 \\ b^3-a^3 & c^3-b^3 & d^3-c^3 \end{vmatrix}$$

On peut factoriser la 1ère colonne par $b-a$, de même dans les colonnes 2 et 3 par $c-b$ et $d-c$, on obtient :

$$D_1 = (b-a)(c-b)(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+b & d+c \\ b^2+ab+a^2 & c^2+bc+b^2 & d^2+cd+c^2 \end{vmatrix}$$

puis en utilisant les opérations sur les colonnes $\begin{cases} c_2 \leftarrow c_2 - c_1 \\ c_3 \leftarrow c_3 - c_2 \end{cases}$ on obtient:

$$D_1 = (b-a)(c-b)(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-a & d-c \\ b^2+ab+a^2 & c^2-a^2+bc-ab & d^2+cd-bc-b^2 \end{vmatrix}$$

Enfin :

$$D_1 = (b-a)(c-b)(d-c) \begin{vmatrix} c-a & d-c \\ c^2-a^2+bc-ab & d^2+cd-bc-b^2 \end{vmatrix}$$

Or $c^2 - a^2 + bc - ab = (c-a)(a+b+c)$ et $d^2 + cd - bc - b^2 = (d-c)(d+b+c)$

En factorisant respectivement chaque colonne par $c-a$ et $d-c$, on obtient :

$$D_1 = (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & d+b+c \end{vmatrix}$$

Et donc : $D_1 = (b-a)(c-b)(d-c)(c-a)(d-c)(d-a)$

$$\begin{aligned}
\bullet D_2 &= \begin{vmatrix} p+q & p & p \\ p & p+q & p+q \\ p & p & p \end{vmatrix} = 0 \text{ car il y a deux colonnes identiques.} \\
\bullet D_3 &= \begin{vmatrix} a & 2 & 5 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 3 \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc
\end{aligned}$$

D_3 est un déterminant triangulaire : il est égal au produit des termes diagonaux.

$$\begin{aligned}
2. (Com\mathbf{A})^T &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 12 & -9 \\ -20 & -4 & 3 \\ -22 & 11 & 11 \end{pmatrix} \\
(com\mathbf{B})^T &= \begin{pmatrix} 39 & -35 & 25 & -11 \\ 20 & 28 & -20 & -4 \\ -2 & 10 & 2 & -6 \\ -15 & -21 & 15 & 19 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2-2.3 Exercice 7b. Changement de bases.

1. $\dim E = 4$, il suffit donc de vérifier que famille de quatre vecteurs B_1 est une famille libre.

Supposons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout X :

$$aX^3 + bX^2(X-1) + cX(X-1)^2 + d(X-1)^3 = 0$$

ce qui équivaut à :

$$(a+b+c+d)X^3 + (-b-2c-3d)X^2 + (c+3d)X - d = 0$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -b-2c-3d=0 \\ c+3d=0 \\ d=0 \end{cases}$$

La solution unique de ce système est : $a=b=c=d=0$

La famille $B_1 = \{X^3; X^2(X-1); X(X-1)^2; (X-1)^3\}$ est donc une base de E .

2. Les colonnes de cette matrice sont les coordonnées des vecteurs de la base B_1 exprimés dans la base B_0 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Il faut exprimer les vecteurs de B_0 dans la base B_1 :

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)X^3 + (-b-2c-3d)X^2 + (c+3d)X - d = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -b-2c-3d=0 \\ c+3d=0 \\ -d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=3 \\ d=-1 \end{cases} \\ (a+b+c+d)X^3 + (-b-2c-3d)X^2 + (c+3d)X - d = X &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -b-2c-3d=0 \\ c+3d=1 \\ -d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=0 \end{cases} \\ (a+b+c+d)X^3 + (-b-2c-3d)X^2 + (c+3d)X - d = X^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -b-2c-3d=1 \\ c+3d=0 \\ -d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \\ (a+b+c+d)X^3 + (-b-2c-3d)X^2 + (c+3d)X - d = X^3 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ -b-2c-3d=0 \\ c+3d=0 \\ -d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que : $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$ et donc que $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$

4. On calcule les images par f des vecteurs de la base B_0 .
On obtient aisément :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\mathbf{M}'$, il suffit d'appliquer la formule de changement de bases : $\mathbf{M}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{MA}$.

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$