3-3 Correction du devoir semaine 3

3-3.1 Exercice 8c. Méthode du pivot de Gauss.

1. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{c} x+ay+a^2z=a^2 \\ ax+y+az=a^2+a-1 \\ 2x+ay+az=2a \end{array}\right.$

   On obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay+a^2z=a^2 \\ \left(1-a^2\right)y+a\left(1-a^2\right)z=-a^3+a^2+a-1 \\ -ay+\left(a-2a^2\right)z=2a\left(1-a\right) \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2-aE_1 \\ E_3 \leftarrow E_3-2E_1 \end{array}\right)$$

   puis, si $a^2 \neq 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay+a^2z=a^2 \\ \left(1-a^2\right)y+a\left(1-a^2\right)z=-a^3+a^2+a-1 \\ \left(a-a^2\right)z=a\left(1-a\right) \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3-\frac{a}{1-a^2}E_2 \end{array}\right)$$

   - si a est différent de 1 ,de 0 et de -1, la sotution est : $\left\{\begin{array}{c} x=a \\ y=-1 \\ z=1 \end{array}\right.$

   - Si $a=0$ le système s'écrit: $\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=-1 \\ 0z=0 \end{array}\right.$, z est quelconque.

     Solution : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$

   - Si $a=1$ le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y+z=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

     Solution : $\begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

   - Si $a=-1$ le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ -x+y-z=-1 \\ 2x-y-z=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2x-y-z=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=-4+3z \\ x=2z-3 \end{array}\right.$$

Solution : $\begin{pmatrix} 2z-3 \\ -4+3z \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre le système : $\begin{cases} 2x+by = 2b^2-2b \\ bx+2y = 4b-b^2 \end{cases}$

   On obtient :

$$\begin{cases} 2x+by = 2b^2-2b \\ \left(2-\frac{b^2}{2}\right) y = 4b-b^3 \end{cases} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \leftarrow E_2 - \frac{b}{2}E_1 \end{pmatrix}$$

- si b est différent de 2 et -2, la sotution est : $\begin{cases} x = -b \\ y = 2b \end{cases}$

- Si $b=2$ le système s'écrit : $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=2$

  Solution $\begin{pmatrix} x \\ 2-x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

- Si $b=-2$ le système s'écrit : $\begin{cases} 2x-2y=12 \\ -2x+2y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow x-y=6$

  Solution $\begin{pmatrix} x \\ x-6 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

3. Résoudre le système : $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ 3x-5y+4z=-8 \end{cases}$

   On obtient :

$$\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ -5y-5z=-5 \\ -14y-2z=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=2 \\ y+z=1 \\ 14y+2z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=2 \\ y+z=1 \\ -12z=0 \end{cases}$$

   Solution : $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

3-3.2 Exercice 9c. Application de la diagonalisation.

1. On a :

$$P(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

donc

$$P(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 3-X & 3-X \\ 1 & -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \right.$$

d'où, en factorisant $(3-X)$:

$$P(X) = (3-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

On en déduit

$$P(X) = (3-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -X-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -X-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \right.$$

Finalement

$$P(X) = (3-X)\,(-1-X)^3$$

3 est valeur propre simple et -1 valeur propre triple.

Déterminons E_3 :

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -3x+y+z+t=0 \\ x-3y+z+t=0 \\ x+y-3z+t=0 \\ x+y+z-3t=0 \end{array} \right.$$

Ce qui équivaut à : $x=y=z=t$. Donc $E_3 = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminons E_{-1} :

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array} \right.$$

Donc $E_{-1} = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. La dimension des espaces propres associés est égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres correspondantes, $\mathbf{A}$ est donc diagonalisable dans la base

$$\left\{ \mathbf{e}_1' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_4' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme associé à $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et nous avons : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$\mathbf{A}^2 = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)\left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$$

et par récurrence immédiate :

$$\mathbf{A}^n = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) .... \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$$

On obtient facilement

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a = \frac{1}{4}\left(3^n + 3(-1)^n\right) \; et \; b = \frac{1}{4}\left(3^n - 3(-1)^n\right)$$

3-3.3 Exercice 10c. Diagonalisation et inversion de matrice.

1. Les valeurs propres de A sont 1 et $\frac{1}{2}$. Pour savoir si A est diagonalisable, il suffit de ragarder le rang de $A - I$ pusique 1 est la seule valeur propre multiple.

$$rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Ainsi $\dim E_1 = 2$ multiplicité de la valeur propre 1. L'autre valeur propre étant simple, son espace propre associé est de dimension 1. A est donc bien diagonalisable.

2. Comme aucune des valeurs propres n'est nulle, A est inversible. Son inverse (en calculant la transposée de la matrice des cofacteurs) est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Comparons les valeurs propres de A et celles de A^{-1}. Si u est un vecteur propre de A (écrit sous sa forme de matrice colonne U), associé à la valeur propre non nulle λ, on a :

$$AU = \lambda U \Longleftrightarrow A^{-1}U = \frac{1}{\lambda}U$$

4. Pour étudier la limite de la suite de terme général $u_n = A^n$, utilisons le fait que A soit diagonalisable. Il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

La suite de terme général u_n converge donc vers

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

En déterminant une base convenable des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 1/2, on peut avoir la matrice P suivante : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$