2-3 Correction du devoir semaine 2

2-3.1 Exercice 5c. Calcul matriciel.

1. Calculons
$$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1/3 & 2 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$
et
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1/3 & 2 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1/3 & 0 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
d'où :
$$\mathbf{A^2} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I}$$
Pour montrer que $\mathbf{A}$ est inversible, il faut trouver une matrice $\mathbf{B}$ telle que : $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$

Ecrivons : $\mathbf{A^2} - \mathbf{A} = \mathbf{2I}$, ce qui est équivalent à : $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{2I}$

On en déduit :
$$\frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{I}$$
Conclusion :
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 9/2 \\ 1/6 & -1/2 & 3/2 \\ 1/18 & 1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Supposons : $\mathbf{A}^p = a_p\mathbf{A} + b_p\mathbf{I}$, en multipliant par $\mathbf{A}$, on obtient :
$$\mathbf{A}^{p+1} = (a_p\mathbf{A} + b_p\mathbf{I})\,\mathbf{A} = a_p\mathbf{A}^2 + b_p\mathbf{A}$$
Or $\mathbf{A^2} = \mathbf{A}+2\mathbf{I}$ d'où
$$\mathbf{A}^{p+1} = ((a_p + b_p)\,\mathbf{A} + (2a_p)\,\mathbf{I}) = (a_{p+1}\mathbf{A} + b_{p+1}\mathbf{I})$$
On trouve donc les relations de récurrence suivantes : $\left\{ \begin{array}{r} a_{p+1} = a_p + b_p \\ b_{p+1} = 2a_p \end{array} \right.$

On a : $\mathbf{A^2} = \mathbf{A}+2\mathbf{I}$ d'où$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ b_2 = 2 \end{array} \right.$

Et en utilisant les relations de récurrence : $\left\{ \begin{array}{l} a_3 = 3 \\ b_3 = 2 \end{array} \right.$

- Autre méthode : Utiliser la division euclidienne de X^n par : $X^2 - X - 2$, en effet : $X^n = (X^2 - X - 2)\, Q(X) + a_n X + b_n$
  On détermine $a_n$et b_n puis en remplaçant X par $\mathbf{A}$, on a le résultat : $\mathbf{A}^n = a_n \mathbf{A} + b_n \mathbf{I}$
  Pour cela il suffit de remplacer X par les racines de $X^2 - X - 2$ soit 2 et -1.
  Le système obtenu est :

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n \\ (-1)^n = -a_n + b_n \end{cases}$$

  ce qui donne

$$\begin{cases} a_n = 1/3\,(2^n - (-1)^n) \\ b_n = 1/3\,(2^n + 2\,(-1)^n) \end{cases}$$

3. Etablissons une relation de récurrence sur les termes en a_p.

   Le système $\begin{cases} a_{p+1} = a_p + b_p \\ b_{p+1} = 2a_p \end{cases}$ s'écrit : $\begin{cases} a_{p+1} = a_p + b_p \\ b_p = 2a_{p-1} \end{cases}$

   Eliminons les termes en b, on obtient :

$$\begin{cases} a_{p+1} = a_p + 2a_{p-1} \\ b_p = 2a_{p-1} \end{cases}$$

On retrouve un problème classique sur les suites : trouver les suites (a_p) vérifiant :

$$a_{p+1} = a_p + 2a_{p-1} \text{ avec } a_2 = 1\ ;\ a_3 = 3.$$

Vérifions que la solution est :

$$a_p = \frac{1}{3}\,(2^p - (-1)^p)$$

On a : $a_p + 2a_{p-1} = \frac{1}{3}\,(2^p - (-1)^p) + 2 \times \frac{1}{3}\left(2^{p-1} - (-1)^{p-1}\right)$
ou encore : $a_p + 2a_{p-1} = \frac{2}{3}2^p - \frac{1}{3}\,(-1)^{p+1} = \frac{1}{3}2^{p+1} - \frac{1}{3}\,(-1)^{p+1} = a_{p+1}$
Il ne reste plus qu'à reporter dans $b_p = 2a_{p-1}$ pour obtenir : $b_p = \frac{1}{3}2^{p+1} - \frac{2}{3}\,(-1)^p$

2-3.2 Exercice 6c. Inversion de matrice.

1. $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & -10 & -3 \\ 2 & -19 & -4 \end{pmatrix}$

   On a :

$$\det \mathbf{AB} = 7\begin{vmatrix} -10 & -3 \\ -19 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -77$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -77$$

$$\text{et} \quad \det \mathbf{B} = 1 \text{ (la matrice } \mathbf{B} \text{ est triangulaire)}$$

On vérifie donc bien

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}$$

2. (a) $\mathbf{D}$ inversible équivaut à $\det \mathbf{D}$ non nul . Calculons $\det \mathbf{D}$: développons suivant la 1ère ligne :

$$\det \mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1+x & 3 & 0 \\ -2 & 5-x & 7 \\ 4 & -5 & -4+x \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} 5-x & 7 \\ -5 & -4+x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -4+x \end{vmatrix}$$

On obtient :

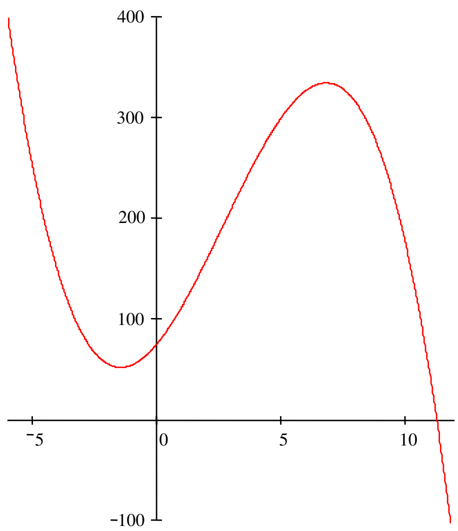
$$\det \mathbf{D} = (1+x)\left[(5-x)(-4+x)+35\right] - 3\,(8-2x-28)$$

Et donc :

$$\det \mathbf{D} = -\,x^3 + 8x^2 + 30x + 75$$

Il s'agit de résoudre : $-x^3 + 8x^2 + 30x + 75 = 0$, il n'y a pas de racine évidente, il faut donc étudier rapidement la fonction

$$f : x \to -x^3 + 8x^2 + 30x + 75$$



La courbe de f montre que f ne s'annule qu'une seule fois en $x_0 \simeq 11,2$ (ne soyez pas surpris, dans la pluspart des cas " non arrangés" on ne peut avoir que des solutions approchées).

Donc

$$\det \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \simeq 11,2$$

(b) Pour $x = 2$, $\mathbf{D}$ est inversible puisque son déterminant est non nul . Calculons son inverse.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix} ;\ \det \mathbf{D} = f(2) = 159$$

On calcule :

$$(Com\mathbf{D})^T = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 6 & 21 \\ 24 & -6 & -21 \\ -2 & 27 & 15 \end{pmatrix}$$

on a donc

$$\mathbf{D} \times (com\mathbf{D})^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 & 6 & 21 \\ 24 & -6 & -21 \\ -2 & 27 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159 & 0 & 0 \\ 0 & 159 & 0 \\ 0 & 0 & 159 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathbf{D} \times (com\mathbf{D})^T = \det D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci permet de déduire

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} (Com\mathbf{D})^T .$$

2-3.3 Exercice 7c. Changement de bases.

1. Le déterminant des coordonnées des vecteurs de la famille B' exprimées dans la base B est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ce déterminant étant non nul, le famille de vecteurs est libre. De plus $\dim E = 3$, or une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension trois est une base de cet espace. Donc une B' est une base de E.
De même, le déterminant des coordonnées des vecteurs de la famille B_1' exprimées dans la base B_1 est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Ce déterminant étant non nul, le famille de vecteurs est libre et donc une base de E ($\dim F = 2$).

2. La matrice M de f dans les bases respectives B et B_1 de E et F, est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Pour écrire la matrice M'de f dans les bases respectives B' et B'_1 de E et F, il faut exprimer les coordonnées des images par f des vecteurs de la base B' dans la base B'_1.
On obtient :
$f(a) = u + v$;
$f(a+b) = 2u = (u+v) + (u-v)$;
$f(a+c) = 2u + v = \frac{3}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v)$.
La matrice M' est donc :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. La matrice inversible P est la matrice de passage de la base B à la base B'. La matrice inversible Q est la matrice de passage de la base B_1 à la base B'_1.
Ces matrices vérifient la relation: $M' = Q^{-1}MP$.
Avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$