1-3 Correction du devoir semaine 1

1-3.1 Exercice 1c - Sous espaces vectoriels supplémentaires

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{array} \right. \right\}$

1. Vérifions que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

   - E est non vide car le vecteur nul $\mathbf{0}$ appartient à E
   - Soit $\mathbf{u_1} = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $\mathbf{u_2} = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ deux vecteurs de E et λ un réel, on a :
   $$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + z_1 = 0 \\ y_1 - 2t_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 + z_2 = 0 \\ y_2 - 2t_2 = 0 \end{array} \right.$$
   Donc :
   $$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + z_1 + \lambda(x_2 + z_2) = 0 \\ y_1 - 2t_1 + \lambda(y_2 - 2t_2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1 + \lambda x_2) + (z_1 + \lambda z_2) = 0 \\ (y_1 + \lambda y_2) - 2(t_1 + \lambda t_2) = 0 \end{array} \right.$$
   Le vecteur $\mathbf{u_1} + \lambda \mathbf{u_2}$ appartient donc à E.

   Déterminons une base de E.
   Soit $\mathbf{u} = (x, y, z, t)$ un élément de E on a :
   $$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ y = 2t \end{array} \right.$$
   Donc
   $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ 2t \\ -x \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Il est évident que les deux vecteurs $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants.
   Ils constituent une base de E, et $\dim E = 2$.

2. Appelons $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$. $\{\mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ est une base de F.
   Pour que les espaces vectoriels E et F soient supplémentaires, il faut et il suffit

que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$, c'est à dire, dans ce cas, que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ soit une famille libre.
Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels, supposons que $\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} + \delta\mathbf{l} = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + \delta = 0 \\ -\alpha + a\delta = 0 \\ \beta + a\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma = a\delta \\ \beta = (1-a)\delta \\ (2a-1)\delta = 0 \end{cases}$$

- Si $a \neq \dfrac{1}{2}$ ce système admet pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. La famille $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$ et E et F sont deux sous espaces supplémentaires.
- Si $a = \dfrac{1}{2}$ ce système admet une infinité de solutions différentes de $(0,0,0,0)$. La famille $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$. E et F ne sont donc pas supplémentaires.

1-3.2 Exercice 2c - Base d'un espace vectoriel

1. On a : $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{2v}$. La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ n'est donc pas libre. $E_1 = Vect\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{2v}$, on peut donc enlever $\mathbf{w}$ de la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ et la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc génératrice de E_1.

   De plus $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = \mathbf{0}$ s'écrit : $(2\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0,0,0)$,

   ou encore $\{2\lambda - \mu = 0, \lambda = 0, \mu = 0\}$ ce qui est équivalent à $\lambda = \mu = 0$.

   La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc libre

   La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est donc une base de E_1 et donc $\dim E_1 = 2$.

   On peut écrire : $E_1 = \{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$, ou encore :

   $$E_1 = \{(2\lambda - \mu, \lambda, \mu), \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

2. E_2 est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$.

   (a) E_2 est non vide, en effet $(0,0,0) \in E_2$
   Soient λ et μ deux réels, $\mathbf{t} = (0, \alpha + \beta, -\beta)$ et $\mathbf{t}' = (0, \alpha' + \beta', -\beta')$ deux éléments de E_2
   On calcule $\lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{t}' = (0, \lambda(\alpha + \beta) + \mu(\alpha' + \beta'), -\lambda\beta - \mu\beta')$
   Donc $\lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{t}' = (0, (\lambda\alpha + \mu\alpha') + (\lambda\beta + \mu\beta'), -(\lambda\beta + \mu\beta'))$
   Donc $\lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{t}' \in E_2$
   E_2 est non vide et stable par combinaison linéaire. E_2 est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathbf{t}$ =$(0, \alpha+\beta, -\beta)$ un élément de E_2
On obtient : $(0, \alpha+\beta, -\beta) = \alpha(0,1,0) + \beta(0,1,-1)$
On note $\mathbf{a}(0,1,0)$ et $\mathbf{b}(0,1,-1)$. La famille $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est donc génératrice de E_2. Cette famille est libre (idem 1.). Donc $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est une base de E_2 et dim $E_2 = 2$.

(b) $E_1 + E_2$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ (dim $E_1 + E_2 \leq 3$
$E_1 + E_2$ est engendré par la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ dont on peut extraire la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}\}$ qui est libre. En effet : supposons qu'il existe λ, μ, ν réels tels que $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{a} = \mathbf{0}$, on obtient le système : $\begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$ qui admet comme solution unique $\lambda = \mu = \nu = 0$.
La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}\}$ est donc une base de $E_1 + E_2$ et donc dim $E_1 + E_2 = 3$. (On peut en déduire que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$)

(c) Dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, on écrit : $\begin{cases} \mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a} = \mathbf{e}_2 \end{cases}$, on obtient : $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{a} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \end{cases}$
Donc les coordonnées de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}\}$ sont :

$$\mathbf{e}_1 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) \ ; \ \mathbf{e}_2 = (0,0,1) \ ; \ \mathbf{e}_3 = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

1-3.3 Exercice 3c - Matrice d'une application linéaire

1. $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, toute famille libre de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une famille libre.

   Supposons qu'il existe λ, μ, ν réels tels que : $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w} = \mathbf{0}$

   on obtient le système : $\begin{cases} \lambda - \mu + 2\nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\nu \\ \mu = -\nu \\ 2\nu = 0 \end{cases}$

   qui admet comme solution unique $\lambda = \mu = \nu = 0$.

   La famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{R}^4$ est muni de la base canonique

   (a) Pour obtenir la matrice $\mathbf{A}$ représentant f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, on exprime $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice $\mathbf{A}'$ représentant f lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est donnée par l'expression de $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On exprime d'abord $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en fonction de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{w} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathbf{e}_3 = \mathbf{u} - \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{e}_1 \\ 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{v} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w} \\ \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{3}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \end{array}\right.$$

On calcule ensuite $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} f(\mathbf{e}_1) = -\frac{1}{2}f(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{w}) \\ f(\mathbf{e}_1) = -\frac{1}{2}f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{v}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{w}) \\ f(\mathbf{e}_1) = \frac{3}{2}f(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{w}) \end{array}\right.$$

Soit, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{l} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ donc : $f(\mathbf{l}) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) + zf(\mathbf{e}_3)$

Donc : $f(\mathbf{l}) = x \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On obtient :

$$f(\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} -y + z \\ \frac{x-y+z}{2} \\ \frac{-x-3y+3z}{2} \\ \frac{-x-y+z}{2} \end{pmatrix}$$

1-3.4 Exercice 4c - Image et noyau d'une application

1. Supposons $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$

   Ceci est équivalent à dire que pour tout x réel, $a\,(1)+b\,(1+x)+c\,(1-x^2) = 0$,c'est à dire :
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$
   Ce qui équivaut à : $a=b=c=0$

   La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est une famille libre de trois vecteurs, dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2\,[X]\,.$

2. $f\,(P) = (2-x^2)\,P' + 2xP$

   Appelons respectivement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les images par f de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. On obtient, pour tout x :
$$\varepsilon_1(x) = 2x\ ;\varepsilon_2(x) = x^2+2x+2\ \ ;\ \varepsilon_3(x) = -2x$$
   On remarque que $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ donc : $\mathit{Im}\,f = \mathit{Vect}\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \ = Vect\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ainsi $\dim \mathit{Im}\,f = 2$

   Cherchons $\mathit{Ker}\,f$: Soit P défini pour tout x par $P(x) = ax^2+bx+c.$

   $P \in \mathit{Ker}\,f \Leftrightarrow f\,(P) = 0.$

   Ceci est équivalent à dire que pour tout x réel,
$$\left(2-x^2\right)(2ax+b) + 2x\left(ax^2+bx+c\right) = 0$$
   Ce qui équivaut à : $\begin{cases} b=0 \\ 4a+2c=0 \end{cases}$ d'où $P(x) = a\,(x^2-2)$

   Soit : $\varepsilon_3'(x) = x^2-2$

   On a : $\mathit{Ker}\,f = \mathit{Vect}\,\{\varepsilon_3'\}$ et $\dim \mathit{Ker}\,f = 1$

   On vérifie bien : $\dim \mathit{Ker}\,f + \dim \mathit{Im}\,f = 1+2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2\,[X]\,.$