Exercices APPLICATIONS LINEAIRES

Algèbre Linéaire

Exercice 1

Un calcul simple montre que $f(u_1) = 0$ Donc le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul , f n'est donc pas injective ni bijective. Imf est généré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Un de ces vecteurs est la somme des deux autres, Le rang de A est 2.Une base de Imf est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le noyau de f est défini par l'équation : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La résolution donne

$$Kerf = Vect\{u_1\}$$

On vérifie le théorème du rang : $dimE = rg(f) + dimKerf$

Exercice 2

1. La famille $e^x; e^{2x}$ est libre : En effet , il n' existe aucun réel a tel que pour tout x,$e^x = ae^{2x}$.
2. Cette famille est liée : en effet $\frac{1}{2}((x^3 - x) + (x^3 - x)) = x^3$
3. Les vecteurs a et c sont égaux , Les vecteurs a et b forment une famile libre .donc le rang de la famille $\{a, b, c\}$ est deux et ne peut être génératrice dun espace vectoriel de dimension 3.
4. Le déterminant de cette matrice est -11 donc son rang est maximal, égal à 3.
5. Le déterminant de la mtrice H est égal à 2, , différent de 0 donc cette matrice est inversible Son inverse est bien la matrice proposée.
6. On peut remarquer que 0 n'appartient pas à F le polynôme $(X^2 - 2 + aX + b$, n'est jamais nul .Donc le polynôme nul n'appartenant pas à F, F n'est pas un espace vectoriel.
7. Il suffit de remarquer que : $F = Vect\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\}$

   F est bien un espace vectoriel.
8. Posons $F = Vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

   et $G = Vect\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

   Une base de F est :$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Une base de G est : $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Si F et G étaient en somme directe, la réunion d'une base de F et d'une base de G serait une famille libre. Or une telle réunion est une famille de 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3. Une telle famile est donc liée .Conclusion, la somme ne peu pas être directe.

Exercice 3

1. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A.
   Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & 0 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-8)$$

   Il y a trois valeurs propres distinctes : $2\,;\frac{1+\sqrt{33}}{2}\,;\frac{1-\sqrt{33}}{2}$, nous sommes dans un espace de dimension 3 ,donc A est diagonalisable et les espaces propres sont de dimension 1. Déterminons les espaces propres.

   – Pour $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -4-2 & 3 & 0 \\ -4 & 5-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix}$$

   Ce qui permet d'obtenir :

$$E_2 = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   – Pour $\lambda = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} -4-\frac{1+\sqrt{33}}{2} & 3 & 0 \\ -4 & 5-\frac{1+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{1+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix}$$

   Ce qui équivaut au système :

$$\begin{pmatrix} (-4-\frac{1+\sqrt{33}}{2})x+3y=0 \\ z=0 \end{pmatrix}$$

   Ce qui permet d'obtenir :

$$E_{\frac{1+\sqrt{33}}{2}} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9+\sqrt{33}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   – Pour $\lambda = \frac{1-\sqrt{33}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} -4-\frac{1-\sqrt{33}}{2} & 3 & 0 \\ -4 & 5-\frac{1-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\frac{1-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ O \end{pmatrix}$$

   Ce qui équivaut au système :

$$\begin{pmatrix} (-4-\frac{1-\sqrt{33}}{2})x+3y=0 \\ z=0 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$E_{\frac{1-\sqrt{33}}{2}} = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9-\sqrt{33}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Dans la base

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9+\sqrt{33}}{6} \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9-\sqrt{33}}{6} \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

La matrice de l'endomorphisme f est diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{9+\sqrt{33}}{6} & \frac{9-\sqrt{33}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base :$A = PDP^{-1}$ et $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$