3) * $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 13 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ opérations sur les colonnes

$= \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\det \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

libre

$= 2 \times 13 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

donc le rang est 4

* 0 vp de f alors $E_0 \neq \{0\}$ et comme $E_0 = \ker f$, f non inversible

* $M = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

famille libre donc

$\dim F = 2$

*

2) a) $\det A = 54 \neq 0$ donc A inversible $\Rightarrow$ dim Ker

th du rang $\quad \dim \mathbb{R}^3 = rg A + \dim \mathrm{Ker} A$

$3 = rg A + 0$

ainsi $rg A = 3$ et $\mathrm{Im} A = \mathbb{R}^3$

b) $\det(A - 6I) = 0 \Rightarrow 6$ est valeur propre

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5+a & -6 & -9 \\ 1 & 1 & a-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+a)x - 6y - 9z = 0 \\ x + y + (a-6)z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+a)x + 6x + 6(a-6)z - 9z = 0 \\ y = -x - (a-6)z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(11+a) + z(6a-45) = 0 \\ y = -x - (a-6)z \end{cases}$

Si $a + 11 \neq 0$ $\quad \begin{cases} x = \left(\dfrac{45-6a}{11+a}\right) z \\ y = \left[\dfrac{6a-45}{11+a} - (a-6)\right] z \end{cases}$

Si $a + 11 = 0$, $\quad z = 0$
et $y = -x$

$P(\lambda) = (6-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -9 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(\lambda^2 - a\lambda + 9)$

$\lambda^2 - a\lambda + 9$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$ ssi $\Delta \geq 0$ soit $a^2 - 36 \geq 0$

$a = 6$

$P(\lambda) = (6-\lambda)(\lambda - 3)^2$

or: $\dim E_3 = 1 \neq$ multiplicité qui est 2

donc A non diag.

$a^2 < 36$

$P(\lambda)$ non scindé donc

A non diag

1) a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

b) $P \in \ker f \iff f(P) = 0$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{vect}\{1, 4X, 9X^2\}$

$= \operatorname{vect}\{1, X, X^2\} = \mathbb{R}_2[X]$

donc Th rang $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \operatorname{Im} f$

$= 4 - 3 = 1$

or $1 \in \ker f$ donc comme $\dim \ker f = 1$

$\ker f = \operatorname{vect}\{1\}$

c) Base de $\mathbb{R}_2[X] \{X^2, X^2+1, X^2+X\}$

$f(1) = 0$

$f(X) = 1 = (X^2+1) - X^2 = P_2 - P_1$

$f(X^2) = 4X = 4(X^2+X) - 4X^2 = 4P_3 - 4P_1$

$f(X^3) = 9X^2 = 9P_1$

$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice de passage est $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$)

$M' = Q^{-1} M$

vérification $QM' = M$