ALGÈBRE Module 1
PAD - Notes de cours

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

September 24, 2008

Table des Matières

Chapitre 2

Matrices – Changement de base

Ce deuxième chapitre comporte deux parties :

1. Etude de l'ensemble des matrices (en tant que tableau numérique) ainsi que toutes les opérations que l'on peut éffectuer (multiplication, addition, ...).

   On exploitera de manière détaillée le lien entre application linéaire et représentation matricielle par la formule de changement de base.

2. Définition et utilisation des déterminants.

2-1 Les ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

2-1.1 Introduction

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, de dimensions finies respectives p et n. En ce qui concerne le corps de référence, on aura en général $K = \mathbb{R}$ ou bien $K = \mathbb{C}$.

A toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut associer une matrice, c'est à dire un tableau de scalaires dans le corps K de référence, qui représente les actions élémentaires de l'application en question exprimées dans des bases particulières des espaces source et image (E et F) de cette application.

En particulier, on peut représenter $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

possédant n lignes et p colonnes, dans laquelle les coefficients $a_{i,j}$ correspondent, par exemple, aux composantes dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de F, de l'image par f des vecteurs de la base canonique de E $\{f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_p)\}$.

Le choix des bases influe bien évidemment directement sur la représentation matricielle d'une application linéaire, mais si on utilise les mêmes bases pour représenter diverses applications linéaires de E dans F, on peut alors introduire certaines opérations sur ces matrices qui permettent de représenter directement sous forme matricielle les opérations équivalentes portant sur les applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$ elles mêmes.

2-1.2 L'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes

Définition 2-1.1

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans le corps K ayant n lignes et p colonnes.

Dans le cas où $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$, et on parle de matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, on peut introduire les opérations suivantes :

- la somme de deux matrices $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathbf{B} = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)\,,$$

- la multiplication d'une matrice $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par un scalaire $\lambda \in K$, notée $\cdot$,

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \left(\lambda\, a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)\,.$$

Proposition 2-1.1 *L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, muni de la somme des matrices et de la multiplication par un scalaire, $(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$, est un espace vectoriel sur K de dimension $n \times p$.*

Une base de cet espace, la base canonique par exemple, est formée des matrices notées $\mathbf{E}_{i,j}$ dont le seul terme non nul et égal à 1 se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Exemple : Une base de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ est constituée des matrices $\mathbf{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{E}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2-2 Le produit matriciel

2-2.1 Produits de matrices élémentaires ligne ou colonne

- On appelle **matrice colonne** (on dit aussi vecteur colonne) une matrice à plusieurs lignes et une seule colonne. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ est une matrice 3 lignes 1 colonne. Son format est (3,1) = (*nombre de lignes, nombre de colonnes*).
- On appelle **matrice ligne** (on dit aussi vecteur ligne) une matrice à une seule ligne et plusieurs colonnes. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice 1 ligne 5 colonnes, et son format est (1,5). C'est aussi la transposée d'une matrice colonne.

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

A partir d'une matrice ligne **A** de $\mathcal{M}_{1,n}(K)$ et d'une matrice colonne **B** de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$, possédant donc le même nombre d'éléments, on peut définir le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \,.$$

Dans le cas où le corps K est $\mathbb{R}$, ceci correspond aussi au produit scalaire de deux vecteurs que nous verrons dans la suite.

Exemple : $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-4) \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 = (27)$, le résultat (27) étant une matrice 1 ligne 1 colonne :

format (1,3) multiplié par *format* (3,1) = *format* (1,1).

Produit d'une matrice colonne par une matrice ligne

A partir d'une matrice colonne **A** de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et d'une matrice ligne **B** de $\mathcal{M}_{1,n}(K)$, possédant là encore le même nombre d'éléments, on peut définir la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$ obtenue par le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_j & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_i b_1 & \dots & a_i b_j & \dots & a_i b_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_j & \dots & a_n b_n \end{pmatrix} .$$

L'opérateur linéaire associé à cette matrice carrée d'ordre n est en fait un endomorphisme de rang 1 en dimension n, dont l'espace image correspond au sous-espace vectoriel engendré par le vecteur colonne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

En effet, on voit bien, dans la matrice produit ci-dessus, que chacune des n colonnes est en fait colinéaire au vecteur colonne $\mathbf{A}$, les facteurs de colinéarité étant donné par les scalaires b_j, $j = 1, \dots, n$.

2-2.2 Définition du produit matriciel

Pour multiplier deux matrices, on utilise le produit ligne par colonne introduit précédemment. Pour que ce produit soit possible, il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième, à savoir :

$$\textit{format}\ \text{(n,p) multiplié par}\ \textit{format}\ \text{(p,m)} = \textit{format}\ \text{(n,m)}.$$

De manière plus précise, la multiplication de deux matrices, $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\mathbf{B} = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ dans $\mathcal{M}_{p,m}(K)$, notée $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, est définie par :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \left(c_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} , \quad \text{avec} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j} ,$$

le résultat étant dans $\mathcal{M}_{n,m}(K)$.

Remarque : Le signe de multiplication entre matrices "$\times$" est en règle générale omis (pour simplifier), et on écrit le produit de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{B}$ comme :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} .$$

Propriétés :

- Dans le cas de la multiplication de plusieurs matrices, le produit matriciel est une opération associative, et on a donc, dans le cas du produit de trois matrices par exemple :

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) .$$

⚠ Le produit matriciel n'est **pas commutatif** (ne serait-ce que pour de simples raisons de compatibilité entre le nombre de colonnes et nombre de lignes entre les matrices de ce produit) !

- Le produit matriciel est une opération distributive par rapport à l'addition des matrices.

Exemples :

1. *format* (2,3) multiplié par *format* (3,2) = *format* (2,2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 2 & 16 \end{pmatrix},$$

chacun des termes $a_{i,j}$ du résultat étant égal au produit de la ligne i de la première matrice par la colonne j de la deuxième matrice.

Par exemple, $a_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$

2. *format* (3,4) multiplié par *format* (4,2) = *format* (3,2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 8 \\ 10 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 36 & 32 \\ 31 & -2 \end{pmatrix}.$$

2-2.3 Le produit matriciel et ses interprétations

Nous venons de voir que le produit matriciel revenait à une juxtaposition de produits ligne-colonne, en considérant toutes les occurences de lignes dans la matrice de gauche $\mathbf{A}$ et de colonnes dans la matrice de droite $\mathbf{B}$ dans ce produit. Il existe cependant trois autres "*façons d'interpréter*" les calculs effectués dans le produit matriciel, à savoir :

- Pour la première de ces interprétations, il suffit de remarquer que chacune des colonnes de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, la j-ème colonne par exemple, est aussi égale à la *combinaison linéaire des colonnes de* $\mathbf{A}$ *affectées des coefficients* $b_{k,j}$ *contenus dans la* j*-ème colonne de la matrice* $\mathbf{B}$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Cette remarque est très utile pour interpréter géométriquement les résultats en termes de sous-espaces vectoriels engendrés par un ensemble de vecteurs.

Par exemple, pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ donnée, dire que :

$$\mathit{Ker}\,\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\},$$

équivaut à dire que les colonnes de $\mathbf{A}$ forment un ensemble de p vecteurs de K^n linéairement indépendants, puisque la seule combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}$

donnant le vecteur nul est celle constituée de coefficients tous nuls. En particulier, pour une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$, cela équivaut aussi à dire que les colonnes de $\mathbf{A}$ forment un ensemble de n vecteurs de K^n linéairement indépendants, et forment donc une base de K^n.

- La deuxième de ces interprétations s'exprime en terme de combinaisons linéaires des lignes de la matrice $\mathbf{B}$. En effet, par transposition du résultat précédent, on peut remarquer que chacune des lignes de la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, la i-ème ligne par exemple, est aussi égale à la *combinaison linéaire des lignes de* $\mathbf{B}$ *affectées des coefficients* $a_{i,k}$ *contenus dans la* i*-ème ligne de la matrice* $\mathbf{A}$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \begin{pmatrix} c_{i,1} & \ldots & c_{i,m} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \begin{pmatrix} b_{k,1} & \ldots & b_{k,m} \end{pmatrix} .$$

- Enfin, la troisième de ces interprétations consiste à séparer les calculs dans ce produit matriciel en *une somme de p matrices de rang 1* toutes dans $\mathcal{M}_{n,m}(K)$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k,1} & \ldots & b_{k,m} \end{pmatrix} .$$

Cette remarque peut servir pour décomposer les transformations qu'opère une matrice en terme d'actions sur des sous-espaces de très faible dimension.

2-3 Composition d'applications et produit matriciel

2-3.1 Le cas général

Le produit matriciel permet d'exprimer directement sous forme matricielle la composée de plusieures applications linéaires, à savoir :

Théorème 2-3.1 *Si E, F, G sont trois espaces vectoriels sur le même corps K, de dimensions respectives n, p, m. Si f appartient à $\mathcal{L}(E,F)$ et g à $\mathcal{L}(F,G)$, de matrices respectives $\mathbf{M}_f$ et $\mathbf{M}_g$ dans des bases fixées de E, F, et G. Alors $g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}(E,G)$ et la matrice associée à cette application composée dans ces mêmes bases est :*

$$\mathbf{M}_{g\circ f} = \mathbf{M}_g \mathbf{M}_f\,.$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur de E de coordonnées $\mathbf{u}$, $g \circ f(\vec{u})$ est le vecteur de G de coordonnées $\mathbf{M}_{g\circ f} \times \mathbf{u} = \mathbf{M}_g \times \mathbf{M}_f \times \mathbf{u}$.

Exemple : Considérons les trois espaces vectoriels suivants : E de base $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}'\}$, F de base $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}''\}$, et G de base $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\}$. Soient les deux applications linéaires définies par :

$$f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \mathbf{e} & \mapsto & \mathbf{a}+\mathbf{a}' \\ \mathbf{e}' & \mapsto & \mathbf{a}+2\mathbf{a}'' \end{array}\right. \qquad \text{et} \quad g\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & G \\ \mathbf{a} & \mapsto & \mathbf{r}-\mathbf{r}' \\ \mathbf{a}' & \mapsto & \mathbf{r}' \\ \mathbf{a}'' & \mapsto & \mathbf{r}+3\mathbf{r}' \end{array}\right.$$

La matrice de f dans les bases $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}'\}$ et $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}''\}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de g dans les bases $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}''\}$ et $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Un calcul rapide montre que : $g \circ f(\mathbf{e}) = \mathbf{r}$ et $g \circ f(\mathbf{e}') = 3\mathbf{r} + 5\mathbf{r}'$. La matrice de $g \circ f$ dans les bases $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}'\}$ et $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\}$ est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, et on vérifie bien que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2-3.2 Composition d'endomorphismes et produit de matrices carrées

On rappelle qu'un endomorphisme f sur un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E ($f \in \mathcal{L}(E)$). Si E est de dimension n sur le corps K, alors on peut représenter f dans une base de E sous la forme d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(K)$.

Propriétés :

- La particularité des endomorphismes sur un espace E est qu'il forment un ensemble *stable* pour la composition des applications "$\circ$". D'ailleurs, $(\mathcal{L}(E), +, \circ,)$ est un **anneau unitaire non commutatif**, le neutre pour la deuxième loi étant l'application identité (Id_E) de E dans E.

- Par analogie, on retrouve ces propriétés pour le produit matriciel sur les espaces de matrices carrées, à savoir que $(\mathcal{M}_n(K), +, \times)$ est un **anneau unitaire non commutatif**, le neutre de la deuxième loi étant la matrice identité d'ordre n,

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  dans laquelle les termes de la diagonale sont égaux à 1, les autres termes étant tous nuls.

Définition 2-3.1 ***Matrices commutables***
S'il est clair que pour deux matrices carrées $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *de* $\mathcal{M}_n(K)$*, les deux produits* $\mathbf{AB}$ *et* $\mathbf{BA}$ *sont bien définis, ils sont en général différents. Dans le cas particulier où*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA},$$

les matrices $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont dites* ***commutables****.*

Le cas de deux matrices commutables est très intéressant, car on retrouve alors des règles de calcul très similaires au produit de nombre réels. Par exemple, on a :

Proposition 2-3.1 ***Formule du binôme pour deux matrices commutables***
Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux matrices carrées commutables de* $\mathcal{M}_n(K)$*. On peut alors écrire :*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \mathbf{A}^k \mathbf{B}^{p-k}.$$

Ce résultat n'est plus valable si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ne sont pas commutables !

2-4 Applications bijectives et matrices carrées inversibles

2-4.1 Définitions et propriétés

Définition 2-4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.*

- *L'application f est dite* ***bijective*** *si et seulement si elle est à la fois* ***injective****, c'est à dire que $\mathsf{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_E\}$, et* ***surjective****, c'est à dire que $\mathsf{Im}\, f = F$.*
- *Une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective est aussi appelée* ***isomorphisme*** *de E dans F.*
- *Dans le cas où $E = F$, un endomorphisme bijectif de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) est aussi appelé* ***automorphisme*** *de E.*

Proposition 2-4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K, et soit f une application linéaire bijective (ou encore isomorphisme) de E dans F.*

Il existe alors une ***unique*** *application linéaire de F dans E, $g \in \mathcal{L}(F, E)$, telle que*

$$f \circ g = Id_E \quad \text{et} \quad g \circ f = Id_F \,.$$

L'application g est appelée ***application réciproque*** *de f, et est habituellement notée f^{-1}.*

Remarque : Ce n'est que dans le cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E, c'est à dire quand les espaces d'arrivée et de départ sont égaux, que l'on parle effectivement de **l'inverse d'une application linéaire** $f \in \mathcal{L}(E)$, car ce n'est que dans ce cas que l'on peut écrire :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E \,.$$

En conséquence directe du théorème du rang, on a les deux résultats suivants :

Proposition 2-4.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K.*

1. *Si il existe dans $\mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire bijective, c'est à dire que f est un isomorphisme de E dans F, alors nécessairement E et F sont de même dimension.*

2. *Dans le cas où $E = F$, un endomorphisme f de E est bijectif si et seulement si f est surjectif, ou encore, si et seulement si f est injectif.*

   Il suffit donc d'étudier le noyau de d'un endomorphisme f pour savoir si il est ou non bijectif.

Définition 2-4.2 ***Inverse d'une matrice carrée***

On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible s'il existe une matrice $\mathbf{B}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n \,.$$

La matrice $\mathbf{B}$ est alors appelée inverse de la matrice $\mathbf{A}$ et se note $\mathbf{A}^{-1}$.

Propriétés :

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application bijective admettant la matrice $\mathbf{A}$ comme représentation matricielle dans des bases données de E et F, alors cette matrice est inversible et son inverse, $\mathbf{A}^{-1}$, correspond à la représentation matricielle de l'application réciproque $g \in \mathcal{L}(F, E)$ de f dans ces mêmes bases.

- L'ensemble des endomorphismes bijectifs de E, muni de la loi de composition des applications "$\circ$", est un groupe appelé **groupe linéaire** de E, et noté $\mathcal{GL}(E)$. Attention, $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ n'est pas un groupe commutatif !

- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles, noté par analogie $\mathcal{GL}_n(K)$, est un groupe non commutatif pour le produit matriciel.

  Par contre, cet ensemble ne peut pas former un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$ car, si $\mathbf{A}$ appartient à $\mathcal{GL}_n(K)$, $-\mathbf{A}$ aussi, et leur somme donne la matrice nulle qui n'est pas inversible.

2-4.2 Inversion et produit matriciel dans $\mathcal{GL}_n(K)$

Les règles qui lient l'inverse d'automorphimes et leur composition sont assez simples :

Proposition 2-4.3 *Soient E, F, et G, trois espaces vectoriels de même dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux isomorphismes, c'est à dire deux applications linéaires bijectives de E dans F et de F dans G respectivement. Alors, l'application $g \circ f$ de $\mathcal{L}(E, G)$ est elle aussi bijective, c'est à dire qu'elle forme un isomorphime de E dans G, et son application réciproque est donnée par la relation :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \,.$$

Concernant le produit matriciel et l'inversion des matrices, on retrouve des règles similaires :

Proposition 2-4.4 *Soient deux matrices inversibles* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *dans* $\mathcal{GL}_n(K)$. *Alors leur produit est aussi une matrice inversible, et on a :*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\,.$$

En exploitant l'associativité du produit matriciel, on peut étendre cela au produit d'un nombre quelconque de matrices inversibles dans $\mathcal{GL}_n(K)$:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1}\ldots\mathbf{A}_1^{-1}\,,$$

ce qui se résume dans la règle suivante :

l'inverse d'un produit de matrices inversibles est égal au
produit dans l'ordre inverse des inverses de chacune d'elles.

2-5 Changements de bases – Equivalence matricielle et similitude

2-5.1 Représentation matricielle d'un changement de base

La remarque essentielle concernant les matrices carrées inversibles, c'est que leurs colonnes forment un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants dans K^n (puisque $\mathit{Ker}\ \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$) et forment donc une base de K^n.

Réciproquement, tout changement de base dans un espace vectoriel E de dimension n définit en fait une application linéaire bijective de E dans E, c'est à dire un automorphisme de E, et peut être représenté par une matrice carrée inversible dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de l'une des bases exprimés dans l'autre de ces bases.

Exemple : Considérons, dans $\mathbb{R}^2$, la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, et une autre base

$$\left\{\mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

les composantes des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ étant exprimées dans la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Notons

$$\mathbf{P} \quad = \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad ,$$

la matrice formée des vecteurs colonnes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ exprimés dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

La matrice $\mathbf{P}$ ainsi définie s'appelle **matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ à la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$**.

Cette matrice représente en fait l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. En effet, quel que soit le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, on a

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

ce qui exprime les coordonnées de $\mathbf{w}$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Pour avoir l'expression matricielle de l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, il suffit d'inverser la matrice $\mathbf{P}$ précédente. En effet, en reprenant la même démarche que précédemment, cela revient à déterminer l'expression de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ en fonction de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et à "*ranger*" ces résultats en colonne dans une matrice. On vérifie assez facilement que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ et que $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$. La matrice résultante est donc

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

qui correspond bien à l'inverse de la matrice $\mathbf{P}$ (car $\mathbf{QP} = \mathbf{PQ} = \mathbf{I}_2$).

2-5.2 Exploitation concrète sur un exemple

Reprenons l'exemple traité au § 1-8.1 de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

exprimée dans les bases canoniques $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Le but de cet exemple était de déterminer l'expression matricielle $\mathbf{B}$ de l'application f dans deux nouvelles bases,

$$\left\{\mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^2, \text{ et } \left\{\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^3,$$

dont les coordonnées sont exprimées dans les bases canoniques respectives.

Pour ce faire, il suffit d'exprimer les coordonnées de $f(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{v})$ dans la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$, et de les "*ranger*" en colonne dans la matrice $\mathbf{B}$.

On considère tout d'abord la matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ à la base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

déjà introduite dans l'exemple précédent. Les colonnes de la matrice $\mathbf{P}$ étant égales aux coordonnées des vecteurs colonnes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ exprimés dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, le produit

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

nous donne directement sous forme matricielle l'expression des vecteurs $f(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{v})$ dans la base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$. Le produit $\mathbf{AP}$ correspond donc à l'expression matricielle de l'application f dans les bases $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$.

Pour terminer, il suffit d'exprimer la matrice de passage de la base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ à la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En reprenant la même démarche que celle détaillée dans l'exemple du début, on comprends que la matrice

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

représente l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$.

Finalement, le produit

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

nous donne le résultat recherché, c'est à dire en colonne l'expression de $f(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{v})$ dans la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$.

2-5.3 Equivalence – Similitude

La formule de changement de base détaillée dans l'exemple précédent exprime une relation d'équivalence entre deux matrices de même taille :

Définition 2-5.1 Equivalence de deux matrices

Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *et* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ *deux matrices de même taille.* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont dites* **équivalentes** *si et seulement si il existe deux* **matrices carrées inversibles***,* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_p(K)$*, telles que*

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Remarque : Les matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$ correspondent en pratique à des changements de base dans K^n (espace d'arrivée) et K^p (espace de départ) respectivement, et $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ représentent la même application linéaire dans ces différentes bases.

Dans le cas particulier des endomorphismes d'un espace vectoriel E, l'espace de départ étant égal à l'espace d'arrivée, on n'a plus qu'un seul changement de base à considérer, et on on parle alors de SIMILITUDE entre matrices carrées :

Définition 2-5.2 Similitude de deux matrices carrées

Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ *et* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(K)$ *deux matrices carrées de même taille.* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont dites* **semblables** *si et seulement si il existe une* **matrice carrée inversible***,* $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_n(K)$ *telle que*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

$\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *représentent alors un même endomorphisme* f *de* E *écrit dans deux bases différentes, la matrice* $\mathbf{P}$ *représentant ce changement de base.*

2-6 La transposition des matrices

2-6.1 Définition et propriétés

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, de dimensions finies respectives p et n. En ce qui concerne le corps de référence, on aura en général $K = \mathbb{R}$ ou bien $K = \mathbb{C}$.

Du point de vue des applications linéaires, la transposition est une opération particulière qui, à une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (représentée par la matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$), associe une application $f^\star \in \mathcal{L}(F, E)$ (représentée par la matrice $\mathbf{A}^T \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$).

Définition 2-6.1

La ***transposée*** *d'une matrice* $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$*, notée* $\mathbf{A}^T$*, est définie par :*

$$\mathbf{A}^T = \left(\alpha_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \ , \quad \text{avec} \quad \alpha_{i,j} = a_{j,i} \ ,$$

le résultat étant cette fois dans $\mathcal{M}_{p,n}(K)$*. Du point de vue purement matriciel, les lignes de la matrice* $\mathbf{A}$ *deviennent les colonnes de sa transposée* $\mathbf{A}^T$*.*

Exemple : $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2-6.1 *La transposition est elle même une application linéaire de l'espace des matrices* $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ *dans l'espace des matrices* $\mathcal{M}_{p,n}(K)$*, c'est à dire un élément de* $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_{n,p}(K), \mathcal{M}_{p,n}(K)\right)$*.*

2-6.2 Transposition et produit matriciel

Les règles qui lient le produit matriciel et l'opération de transposition sont assez simples, à savoir :

Proposition 2-6.2 *Soient deux matrices* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$*, et* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p,m}(K)$*. Alors on a :*

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \, .$$

En exploitant l'associativité du produit matriciel, on peut étendre cela au produit d'un nombre quelconque de matrices :

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_{k-1}^T \ldots \mathbf{A}_1^T \, ,$$

ce qui se résume dans la règle suivante :

la transposition appliquée à un produit de matrices
renverse l'ordre de ce produit et s'applique terme à terme.

2-6.3 Transposition et symétrie dans $\mathcal{M}_n(K)$

La *transposition* est une opération qui est **stable** dans l'espace des matrices carrés d'ordre n. En effet, si on se place dans $\mathcal{M}_n(K)$, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^T$ appartiennent toutes deux au même ensemble $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition 2-6.3 *La transposition est une application linéaire dans l'ensemble des endomorphismes d'un même espace vectoriel E. C'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.*

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & 12 \end{pmatrix}$, les termes de la diagonale restant inchangés.

Définition 2-6.2 *Dans $\mathcal{M}_n(K)$, on peut introduire les deux sous-ensembles suivants :*

- *L'ensemble $\mathcal{S}_n(K)$ des matrices **symétriques**, c'est à dire l'ensemble des matrices $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que*
$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\,.$$
- *L'ensemble $\mathcal{A}_n(K)$ des matrices **anti-symétriques**, c'est à dire l'ensemble des matrices $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que*
$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\,.$$

Exemples :

- Matrice symétrique dans $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 5 & 0 & 41 \\ 5 & \mathbf{2} & 6 & 12 \\ 0 & 6 & \mathbf{-1} & 87 \\ 41 & 12 & 87 & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$
- Matrice anti-symétrique dans $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 5 & 0 & -41 \\ -5 & \mathbf{0} & -6 & -12 \\ 0 & 6 & \mathbf{0} & 87 \\ 41 & 12 & -87 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Remarque : Etant donné que la transposition conserve la diagonale d'une matrice, il est à noter que toute matrice anti-symétrique a nécessairement tous ses termes diagonaux qui sont nuls !

Proposition 2-6.4 *$(\mathcal{S}_n(K), +, \cdot)$ et $(\mathcal{A}_n(K), +, \cdot)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$ stables par transposition.*

De plus $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ sont en somme directe dans $\mathcal{M}_n(K)$, c'est à dire que

$$\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S}_n(K) \oplus \mathcal{A}_n(K)\,,$$

toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ se décomposant de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique de la façon suivante :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}\,.$$

Propriété : Il est à noter aussi que l'on peut munir $\mathcal{M}_n(K)$ d'une structure euclidienne à l'aide de la norme de *Frobénius* (c'est à dire une norme qui dérive d'un produit scalaire), que nous verrons plus tard, et que, pour cette norme, $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ sont en plus en *somme directe orthogonale* dans $\mathcal{M}_n(K)$.

2-6.4 Inversion et transposition dans $\mathcal{GL}_n(K)$

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{GL}_n(K)$ une matrice inversible. Le simple fait que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n\,,$$

nous permet d'écrire, par transposition, que

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbf{I}_n^T = \mathbf{I}_n\,.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition 2-6.5 *Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{GL}_n(K)$ une matrice inversible. L'inverse de la transposée de $\mathbf{A}$ est égale à la transposée de l'inverse de $\mathbf{A}$. En d'autres termes, les opérateurs d'inversion et de transposition commutent, et on note :*

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}\,.$$

Conséquence : On en déduit facilement que si $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique inversible, alors son inverse $\mathbf{A}^{-1}$ est aussi une matrice symétrique.

2-7 Matrices carrées – Polynômes de matrices

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au cas des matrices carrées dans $\mathcal{M}_n(K)$, qui représentent les **endomorphismes** f d'un espace E ($f \in \mathcal{L}(E)$), E étant un espace vectoriel de dimension n sur le corps K.

2-7.1 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

La stabilité du produit matriciel dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n, ainsi que ses propriétés (distributivité par rapport à l'addition, associativité), nous permet d'introduire le **calcul polynômial** sur les matrices carrées.
Exemple : Notons $K[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps K, et soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. Au polynôme $2X^2-3X+5$, par exemple, on peut associer la matrice

$$2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 5\mathbf{I}_n\,,$$

sachant que au polynôme constant 1 est associé la matrice $\mathbf{I}_n$.

- En généralisant cette manipulation pour toute matrice carrée $\mathbf{A}$, on peut associer, à tout polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$$

  la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$

$$P(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathbf{A}^k\,,$$

  avec la convention

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n\,.$$

- De manière équivalente, si nous considérons un endomorphisme f de l'espace vectoriel E ($f \in \mathcal{L}(E)$), au polynôme $P(X)$ ci-dessus, on peut associer l'endomorphisme de E

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k\,,$$

  en notant $f^0 = Id_E$ (l'identité sur E) et $f^k = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (k fois).

- Enfin, si dans une base de E la matrice de f est $\mathbf{A}$, la matrice de $P(f)$ dans cette même base sera alors donnée par le polynôme matriciel $P(\mathbf{A})$.

Pour terminer, il faut noter que, pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ donnée, tout polynôme

$$P(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathbf{A}^k$$

est *commutable* avec $\mathbf{A}$, c'est à dire que

$$\mathbf{A} P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A}) \mathbf{A} .$$

On a en fait le résultat plus complet suivant :

Proposition 2-7.1 *Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. Alors, l'ensemble $K[\mathbf{A}]$ des polynômes de la matrice $\mathbf{A}$ à coefficients dans le corps K est un* ***sous-espace vectoriel*** *de $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$, stable pour le produit matriciel.*

En outre $(K[\mathbf{A}], +, \times)$ est un ***anneau unitaire et commutatif****.*

2-7.2 Quelques matrices carrées particulières

- La matrice nulle : *Tous ses termes valent 0.*
- Les matrices scalaires : *seuls les termes de la diagonale sont non nuls et égaux entre eux.* Cela correspond au sous-espace vectoriel engendré par la matrice identité $\mathbf{I}_n$.
- Les matrices diagonales : *seuls les termes de la diagonale sont non nuls mais pas nécessairement égaux entre eux.*

  Exemple : Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

  Cet ensemble de matrices forme un sous-espace vectoriel de dimension n dans l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(K)$. engendré par les matrices élémentaires $\mathbf{E}_{i,i}$, $i = 1, \ldots, n$, ne possédant qu'un seul élément non nul égal à 1 en i-ème position sur la diagonale.
- Les matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) : *les termes en dessous (respectivement au dessus) de la diagonale sont tous nuls.*

  Exemple : Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 41 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

  Cet ensemble de matrices forme aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$, de dimension $n(n+1)/2$.

Propriétés :

- La particularité commune à tous ces sous-espaces de matrices carrées est qu'ils sont **stables pour le produit matriciel**. On peut donc, comme précédemment, développer une arithmétique polynômiale sur chacun de ces sous-espaces de matrices.
- L'ensemble des matrices diagonales présente en outre la particularité d'être un ensemble de matrices *commutables* entre elles, et donc dans lequel le produit matriciel est **commutatif**.

2-8 La trace d'une matrice carrée

Sur les ensembles de matrices carrées, on peut aussi définir une application particulière, appelée **application trace** :

Définition 2-8.1 ***Trace d'une matrice carrée.***

Soit $\mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *une matrice carrée dans* $\mathcal{M}_n(K)$*. On appelle* "trace" *de* $\mathbf{A}$ *l'élément du corps* K *correspondant à la somme des éléments diagonaux de la matrice* $\mathbf{A}$*, à savoir :*

$$\mathit{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \, .$$

Propriétés :

- L'application trace est une *forme linéaire* sur l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(K)$, c'est à dire une application de $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(K), K\right)$.

- Pour deux matrices carrées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ quelconques de $\mathcal{M}_n(K)$, on a :

$$\mathit{trace}\,(\mathbf{AB}) \;=\; \mathit{trace}\,(\mathbf{BA}) \; .$$

  On dit que la trace est **opérateur symétrique** sur l'espace des matrices carrées.

- La trace d'une matrice est *invariante par transformation de similitude*, c'est à dire que pour toute matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ et pour toute matrice inversible $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_n(K)$, on a :

$$\mathit{trace}\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right) = \mathit{trace}\,(\mathbf{A}) \; .$$

- En relation directe avec la propriété précédente, on peut aussi parler de *la trace d'un endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$, celle-ci étant définie par la trace de sa représentation matricielle dans une base quelconque de E, ceci indépendamment du choix de la base. En effet, deux représentations matricielles d'un même endomorphisme dans deux bases différentes sont directement liées par une relation de similitude, la matrice inversible $\mathbf{P}$ dans cette relation exprimant simplement l'opération de passage d'une base à l'autre.

2-9 Le déterminant de matrices 2×2 et 3×3

2-9.1 Déterminant de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Le déterminant est une application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe un réel. L'intérêt des déterminants est de fournir des conditions explicites pour étudier l'indépendance linéaire.

Dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant d'une matrice 2×2, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, est donné par le réel $(ad-bc)$, c'est à dire par *la différence entre le produit des termes de la diagonale principale et le produit des termes de la diagonale transverse.* On le note :

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$, $\det \mathbf{A}$, est aussi appelé *déterminant de la famille de vecteurs* $\left\{ \mathbf{u}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{v}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$ et noté $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Propriétés : Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

1. $\det(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $\det(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
2. $\det(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

En résumé, on dit que l'application qui à tout couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ associe son déterminant, est une application **bilinéaire** (propriétés 1 et 2) **alternée** (propriété 3).

On peut aussi démontrer que :

4. $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires (ne forment pas une famille libre).
5. Le déterminant d'une matrice 2×2 est égal à celui de sa transposée
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$
6. Le déterminant du produit de deux matrices 2×2 est égal au produit des deux déterminants
$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}\,.$$

2-9.2 Déterminant de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant d'une matrice 3×3, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, est donné par le réel

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha\,.$$

Pour se souvenir de la règle de calcul d'un déterminant 3×3, il suffit de remarquer que dans la matrice ci-dessus, on peut "*dessiner*" deux triangles avec un côté parallèle à la diagonale principale, $\triangle\ (bfg)$ et $\triangle\ (dhc)$, et deux autres avec un côté parallèle à la diagonale transverse, $\triangle\ (bdi)$ et $\triangle\ (fha)$. Le déterminant d'une matrice 3×3 s'obtient alors en sommant le produit des termes de la diagonale principale avec les produits des termes des deux triangles ayant un côté parallèle à la diagonale principale, et en soustrayant le produit des termes de la diagonale transverse ainsi que ceux des termes des deux triangles avec un côté parallèle à cette diagonale transverse.

Propriétés : On retrouve là encore des propriétés tout à fait similaires, à savoir :

1. Le déterminant d'une matrice 3×3 est une application **tri-linéaire**, c'est à dire linéaire par rapport à chacune des trois colonnes ou vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dans cette matrice.

2. Le déterminant d'une matrice 3×3 est une application **alternée**, c'est à dire que si on échange deux colonnes quelconques entre elles dans la matrice, le déterminant change de signe.

3. Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs colonne de la matrice sont colinéaires (ne forment pas une famille libre).

4. Le déterminant d'une matrice 3×3 est égal à celui de sa transposée.

5. Le déterminant du produit de deux matrices 3×3 est égal au produit des deux déterminants de chacune des deux matrices.

2-10 Le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$

2-10.1 Calcul pratique du déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$

Il se fait par récurrence sur n.

Tout d'abord, introduisons des sous matrices particulières de taille $(n-1)\times(n-1)$, extraites de la matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ dont on veut calculer le déterminant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

en enlevant la ligne i et la colonne j associées au terme $a_{i,j}$ dans la matrice $\mathbf{A}$, et que l'on notera $\mathbf{A}_{i,j}$. En utilisant ces notations, on a alors les résultats suivants :

- $\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det \mathbf{A}_{i,1}$, par développement suivant la $1^{\text{ère}}$ colonne,
- $\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det \mathbf{A}_{1,j}$, par développement suivant la $1^{\text{ère}}$ ligne.

Les deux développements précédents permettent de calculer par récurrence tout déterminant, en développant les déterminants des matrices d'ordre inférieur $\mathbf{A}_{i,j}$ apparaissant dans ces développements, ceci jusqu'à l'ordre 1.

Ceci se généralise en développant suivant la colonne j

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \mathbf{A}_{i,j} \, ,$$

ou bien encore en développant suivant la ligne i

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \mathbf{A}_{i,j} \, .$$

2-10.2 Propriétés

Dans K^n, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$, ou, de manière équivalente, de la famille des n vecteurs de K^n $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$, formant les colonnes de $\mathbf{A}$, et noté $\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, est une **forme n-linéaire alternée** vérifiant les propriétés :

1. $\det(\mathbf{u}_1, \ldots, \lambda\mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) = \lambda \det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
2. $\det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_j^{'}, \ldots, \mathbf{u}_n) = \det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) + \det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j^{'}, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
3. $\det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) = -\det(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_n)$, c'est à dire que le déterminant change de signe si dans la famille de vecteurs on en permute deux.
4. $\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$ sont linéairement dépendants (ne forment pas une famille libre).
5. Le déterminant d'une matrice carrée est égal à celui de sa transposée :
$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T\,.$$
6. Le déterminant du produit de deux matrices carrées de même ordre est égal au produit des deux déterminants :
$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{B}\,.$$

2-10.3 Calcul de déterminants – Exemples

Illustrons en premier le développement suivant une ligne i ou suivant une colonne j quelconque :

- En développant suivant la 1ère colonne :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= +6 - 90 + 48 = -36\,.$$

- En développant suivant la 2ème ligne :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(6)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= -90 + 40 + 14 = -36\,.$$

On peut aussi utiliser les propriétés 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 précédentes pour combiner des lignes puis des colonnes, et faire apparaître le plus de 0 possibles sur une ligne ou une colonne fixée avant de développer suivant cette ligne ou cette colonne, avec beaucoup moins de calculs en final. En effet, les propriétés 1 et 2, combinées avec la propriété 4, font qu'il est possible d'ajouter à n'importe quelle colonne d'une matrice une combinaison linéaire des **autres** colonnes sans que le déterminant ne change. Par transposition, avec la propriété 5, on a aussi le même résultat en opérant sur les lignes de la matrice.

- Dans l'exemple suivant, on combine des lignes ou des colonnes pour faire apparaître un maximum d'éléments nuls sur la première ligne, par exemple, puis on développe suivant cette ligne :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -8 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{\left\{ \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \right.}$$
$$= +(3) \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -36 \,.$$

2-10.4 Déterminant d'un endomorphisme

A partir des propiétés du déterminant, il est facile de vérifier que, pour une matrice $\mathbf{A}$ inversible, on a :

$$\det \mathbf{A} \times \det \mathbf{A}^{-1} = \det \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right) = \det \mathbf{I}_n = 1 \,,$$

et donc que

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.$$

Dans le cas de deux matrices carrées semblables,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \,,$$

qui correspondent donc à la représentation d'un même endomorphisme dans deux base différentes, on peut écrire que :

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{P}^{-1} \times \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{P} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \times \det \mathbf{A} \times \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A} \,.$$

On voit donc que **les déterminants de deux matrices semblables sont égaux**, ce qui nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 2-10.1 ***Déterminant d'un endomorphisme***

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On appelle Déterminant de f le déterminant d'une matrice de f dans une base quelconque de E, ce déterminant étant indépendant du choix de la base.

2-10.5 Applications du déterminant

Théorème 2-10.1 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(K)$*, la famille des* n *vecteurs de* K^n*,* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$*, formant les colonnes de* $\mathbf{A}$ *est une base de* K^n *si et seulement si :* $\det \mathbf{A} \neq 0$

Reconnaître une famille libre

Proposition 2-10.1 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* n*,* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ *une famille de* r *vecteurs de* E *(*$r \leq n$*) et* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,r}(K)$*, la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ *dans une base quelconque de* E*. La famille* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ *est libre si et seulement si on peut extraire de* $\boldsymbol{A}$ *un déterminant d'ordre* r *(appelé* **mineur** *d'ordre* r*) non nul.*

Rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs

Proposition 2-10.2 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$*.* $\mathrm{rang}\,\mathbf{A} = r$ *(ou, de manière équivalente, le rang de la famille des* p *vecteurs de* K^n $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$*, formant les colonnes de* $\mathbf{A}$ *est égal à* r*) si et seulement si :*

- *il existe un mineur extrait de* $\mathbf{A}$ *d'ordre* r *non nul*
- *tous les mineurs extraits de* $\mathbf{A}$ *d'ordre* $q > r$ *sont nuls*

Rang de la transposée d'une matrice

La propriété précedente nous permet d'énoncer :

Proposition 2-10.3 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$*.* $\mathrm{rang}\,\mathbf{A} = \mathrm{rang}\,\mathbf{A}^T$

2-11 Déterminants, Comatrice, et calcul de l'inverse d'une matrice

2-11.1 Matrice des cofacteurs et inverse

Une application pratique des déterminants concerne le calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible. A cet égard, rappelons que

$$\mathbf{A} \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det \mathbf{A} \neq 0.$$

Le calcul de l'inverse d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ peut se faire par l'intermédiaire du calcul des cofacteurs de cette matrice, à savoir (à un facteur $(-1)^{i+j}$ près) les déterminants des sous-matrices $\mathbf{A}_{i,j}$ extraites de la matrice $\mathbf{A}$ en enlevant la ligne i et la colonne j. Rappelons que $\mathbf{A}_{i,j}$ appartient à $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 2-11.1 Matrice des cofacteurs
Soit $\mathbf{A}$ *une matrice carrée d'ordre* n, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On appelle* **matrice des cofacteurs de** $\mathbf{A}$, *ou encore* **co-matrice** *de la matrice* $\mathbf{A}$, *la matrice notée* $\mathsf{Com}\,(\mathbf{A})$ *suivante :*

$$\mathsf{Com}\,(\mathbf{A}) = \Big((-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{i,j} \Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

Le calcul de l'inverse d'une matrice – il existe d'autres méthodes – peut alors se faire de la façon suivante :

Théorème 2-11.1 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice inversible. L'inverse de* $\mathbf{A}$ *est alors donné par :*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \Big(\mathsf{Com}\,(\mathbf{A}) \Big)^T.$$

2-11.2 Calcul de l'inverse d'une matrice – Exemple

Reprenons le cas de l'exemple développé au § 2-5.2 où on avait calculé les matrices d'une même application linéaire dans des bases différentes. Dans le cadre de cet exemple, on avait abouti à une relation d'équivalence matricielle

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,,$$

dans laquelle intervenait donc l'inverse de la matrice de changement de base :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de cet inverse, qui peut s'obtenir facilement "*à la main*" comme au § 2-5.2, dans le cas particulier de cet exemple, peut aussi être calculé à l'aide de la matrice de cofacteurs de $\mathbf{Q}$ et de la formule

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{Q}} \Big(\mathit{Com}\,(\mathbf{Q}) \Big)^T .$$

En effet, $\det \mathbf{Q} = (-1)$, et

$$\mathit{Com}\,(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ & & \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ & & \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Du coup, on retrouve le résultat déjà obtenu précédemment :

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$