ALGÈBRE Module 1
PAD - Notes de cours

S. Rigal, D. Ruiz, et J. C. Satgé

June 10, 2010

Table des Matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels – Applications linéaires

Ce premier chapitre met en place les notions de base essentielles pour la suite du cours. Vous découvrirez, en particulier :

- la structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des nombres réels et sur l'ensemble des nombres complexes.
- Une catégorie d'applications bien adaptées à la structure d'espace vectoriel : les applications linéaires.
- Pour ces applications, nous définirons les notions de noyau, d'image et de rang.
- Enfin, vous verrez comment on peut associer, à toute application linéaire, une matrice (un tableau de nombres) qui traduit toutes les informations de l'application linéaire qu'elle représente.

1-1 Espaces vectoriels

1-1.1 Approche de la notion d'espace vectoriel

Vous connaissez l'ensemble V des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Sur V on peut définir plusieurs opérations :

- L'addition de deux vecteurs,

$$\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \vec{\mathbf{u}}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{u}}''\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix},$$

qui est une loi interne dans V. On dit que cette loi est interne car, à partir de deux vecteurs de V on construit un nouveau vecteur de V.

On vérifie aisément que cette loi interne est commutative **(C)**, associative **(A)**, que $\vec{\mathbf{0}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est élément neutre pour cette loi **(N)** et que tout élément $\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de V admet un élément symétrique $-\vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ **(S)**.

On conclut que $(V, +)$ est un groupe commutatif.

- La multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

$$\lambda \bullet \vec{\mathbf{u}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{u}}'\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}.$$

⚠ cette loi n'est pas appelée loi interne car ce n'est pas à partir de deux vecteurs que l'on construit un nouveau vecteur, mais à l'aide d'un réel et d'un vecteur. On dit que c'est une loi externe.

Cette multiplication possède les propriétés suivantes. Quels que soient les réels a et b, quels que soient les vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$, on a :

$$\begin{aligned} a \bullet (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) &= (a \bullet \vec{\mathbf{u}}) + (a \bullet \vec{\mathbf{v}}) \\ (a+b) \bullet \vec{\mathbf{u}} &= (a \bullet \vec{\mathbf{u}}) + (b \bullet \vec{\mathbf{u}}) \\ a \bullet (b \bullet \vec{\mathbf{u}}) &= ab \bullet \vec{\mathbf{u}} \\ 1 \bullet \vec{\mathbf{u}} &= \vec{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

On dit que V muni de la loi interne $+$ et de la loi externe $\bullet$ sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. En résumé, $(V, +, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1-1.2 Espace vectoriel sur un corps K

Définition 1-1.1 *Ici K représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
On appelle espace vectoriel sur le corps K, un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :

- *Une loi interne, c'est à dire une application de $E \times E \to E$, notée $+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

  1. $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in E^2,\ \mathbf{u}+\mathbf{v}{=}\mathbf{v}+\mathbf{u}$ ***(C)***
  2. $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \in E^2,\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}{=}\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ ***(A)***
  3. *Il existe un élément de E, noté $\mathbf{0}$, appelé élément neutre, tel que :* $\forall \mathbf{u} \in E\,,\ \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ ***(N)***.
  4. *Pour tout $\mathbf{u}$ élément de E il existe un élément de E noté $-\mathbf{u}$, appelé symétrique de $\mathbf{u}$, tel que :* $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ ***(S)***.

- *Une loi externe, c'est à dire une application de $K \times E \to E$, notée $\bullet$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\forall(a,b) \in K^2\,,\ \forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in E^2\,,\quad \begin{array}{ll} a\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{v}){=}(a\bullet\mathbf{u})+(a\bullet\mathbf{v}) & (\boldsymbol{P}_1) \\ (a+b)\bullet\mathbf{u}{=}(a\bullet\mathbf{u})+(b\bullet\mathbf{u}) & (\boldsymbol{P}_2) \\ a\bullet(b\bullet\mathbf{u}){=}ab\bullet\mathbf{u} & (\boldsymbol{P}_3) \\ 1\bullet\mathbf{u}{=}\mathbf{u} & (\boldsymbol{P}_4) \end{array}$$

Remarque : le mot vecteur désigne le nom d'un élément d'un espace vectoriel. Ce n'est pas nécessairement un objet géométrique, et on ne met pas toujours de $\to$. Les éléments du corps K sont appelés scalaires.

1-1.3 Exemples

- $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

  $\mathbb{C}$, muni de l'addition et de la multiplication est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- $\mathbb{R}^n$ est muni des lois suivantes :

  1. $(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$
  2. $\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$

  $(\mathbb{R}^n,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

  De même, $(\mathbb{C}^n,+,.)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{E}$ est muni des lois suivantes :

  1. f et g étant deux fonctions de $\mathcal{E}$, $f+g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  2. λ étant un réel et f une fonction de $\mathcal{E}$, $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

  $(\mathcal{E}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La fonction constante nulle est l'élément neutre.

- L'ensemble des suites de nombres réels (fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est à dire des tableaux d'éléments de $\mathbb{R}$ à deux lignes et deux colonnes. On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les lois :

  1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$
  2. $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Plus généralement, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est à dire des tableaux d'éléments de $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des lois analogues à celles définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1-2 Sous espace vectoriel

1-2.1 Définition et propriétés

Définition 1-2.1 *Soit E un K-espace vectoriel. G est un sous espace vectoriel de E sur le corps K si et seulement si G est inclus dans E, G est non vide, et G est un espace vectoriel pour les lois définies sur E, mais restreintes à G.*

En principe , pour démontrer que G est un sous espace vectoriel de E, il faut vérifier que $G \neq \varnothing$ et que les lois restreintes à G possèdent les huit propriétés : C,A,N,S,P_1,P_2,P_3,P_4. En fait, il suffit de vérifier la *stabilité* des lois de composition.

Théorème 1-2.1 *Soit E un K-espace vectoriel et $G \subset E$. G est un sous espace vectoriel de E sur le corps K si et seulement si :*

1. $G \neq \varnothing$
2. *G est stable pour les deux lois de compositions de E, i.e. :*
   (a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, *on a :* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in G$
   (b) $\forall \mathbf{x} \in G$, $\forall \lambda \in K$, *on a :* $\lambda \mathbf{x} \in G$

Remarque : Si G est un sous espace vectoriel de E, alors G contient le vecteur nul de E. En effet, soit $\mathbf{x} \in G$ ($G \neq \varnothing$), on a : $0.\mathbf{x} \in G$, et donc $\mathbf{0} \in G$

Note : Dans le théorème précédent les 2.a. et 2.b peuvent être remplacé par : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$, $\forall \lambda, \mu \in K$, on a : $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in G$. On dit que G est *stable par combinaison linéaire*.

Théorème 1-2.2 *Soit E un espace vectoriel donné et G un sous ensemble de E. Pour montrer que G est un sous espace vectoriel de E (ou encore, s.e.v. de E), il suffit de montrer que G est non vide et que G est stable par combinaison linéaire.*

1-2.2 Exemples

- E est un espace vectoriel d'élément neutre $\mathbf{0}$. Alors $\{\mathbf{0}\}$ et E sont des sous espaces vectoriels de E.
- I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. En effet, $\mathcal{F}$ est non vide, la somme de deux fonctions continues est continue, et le produit par un réel d'une fonction continue est continue.
- L'ensemble des suites convergentes de nombres réels est un s.e.v. du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites de nombres réels. En effet, la somme de deux suites convergentes est convergente, et, si l'on multiplie une suite convergente par un réel, on obtient une suite convergente.

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$. F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
  En effet (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) étant deux éléments de F, on a :
  $2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0$ et $2x_2 + 3y_2 - z_2 = 0$
  On en déduit, $2x_1 + 3y_1 - z_1 + 2x_2 + 3y_2 - z_2 = 0$
  donc $2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$
  et donc $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$.
  De même, on montre que si $(x, y, z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(x, y, z) \in F$.

  ⚠ Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 1\}$. G n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
  En effet $(0, 0, 0) \notin G$!

- Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. $\mathcal{G}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 1 \end{pmatrix}$. $\mathcal{L}$ n'est pas un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet $\mathcal{L}$ ne contient pas la matrice nulle !

1-2.3 Vectorialisé d'une famille finie de vecteurs

A l'aide de deux vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, on peut construire les vecteurs $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$, $4\mathbf{u} - 15\mathbf{v}$, $-20\mathbf{u} + 50.8\mathbf{v}$. Ce sont tous des **combinaisons linéaires** des vecteurs de la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Définition 1-2.2 *Soit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ une famille finie de vecteurs de l'espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $\mathbf{x}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ s'il existe une famille de scalaires $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ telle que*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n\,.$$

Définition 1-2.3 *Dans un espace vectoriel E, l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ est un sous espace vectoriel de E, appelé **vectorialisé de cette famille**. On le note* Vect $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

1-2.4 Intersection de deux sous espaces vectoriels

Théorème 1-2.3 *Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.*

Exemple : Soit H l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ t.q. $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{array} \right.$.

H est l'intersection des sous espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } -x - y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. H est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1-3 Famille finie génératrice et famille libre

1-3.1 Famille génératrice

Tout comme on a introduit le vectorialisé d'une famille finie de vecteurs, on peut chercher si, dans un espace vectoriel donné, il est possible d'écrire tout vecteur comme combinaison linéaire d'une famille particulière de vecteurs. Cette famille permet alors de générer (d'exprimer par combinaison linéaire) tous les vecteurs de l'espace considéré : on l'appelle donc **famille génératrice**.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ s'écrit comme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

⚠ Une telle famille n'est pas unique. En effet, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut aussi s'écrire comme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est donc elle aussi génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1-3.1 *Une famille finie de vecteurs* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite génératrice, si pour tout* $\mathbf{x} \in E$*, il existe une famille de scalaires* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *telle que* $\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$.

Autrement dit : $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ est une famille génératrice de E revient à dire que $E = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$.

Notes :

- On a vu que la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$.
- Considérons la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$. Elle est aussi génératrice dans $\mathbb{R}^2$. En effet , tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ s'écrit comme $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Plus généralement : Toute famille contenant une famille génératrice est elle-même génératrice.

1-3.2 Famille libre

Définition 1-3.2 *On dit qu'une famille finie de vecteurs* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est **libre** si et seulement si aucun des vecteurs de cette famille n'est combinaison linéaire des autres. Ceci est aussi équivalent à :*

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \implies a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0\,.$$

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$, soient les vecteurs $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ et $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$

  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ n'est pas une famille libre dans $\mathbb{R}^3$, car $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. On dit que cette famille est **liée**

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$. F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{u} = (x, y, z) \in F$, on a donc : $z = 2x + 3y$, et tout élément $\mathbf{u} \in F$ s'écrit donc comme : $\mathbf{u} = (x, y, 2x + 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3)$.

  Ainsi, les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)$ forment une famille génératrice de F. De plus $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ s'écrit $(a_1, a_2, 2a_1 + 3a_2) = (0, 0, 0)$, ce qui revient à $\{a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ 2a_1 + 3a_2 = 0\}$ et est équivalent à $a_1 = a_2 = 0$.

  La famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est donc une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

Revenons aux familles génératrices. On peut chercher une famille finie génératrice telle que le nombre de vecteurs de cette famille soit **minimal**. Ainsi, si un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille, la nouvelle famille restera génératrice mais aura un vecteur de moins. Si l'on recommence autant de fois que possible, on obtiendra une famille génératrice qui aura un nombre minimal de vecteurs et qui sera donc **libre**.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les vecteurs $\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$. En effet tout vecteur $\mathbf{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ s'écrit, par exemple, comme : $\mathbf{u} = (a - b)\mathbf{e}_1 + 2b\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3 + b\mathbf{e}_4$.

- Or $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, et on peut donc enlever $\mathbf{e}_4$ de la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. La famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est donc ausi génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

- De la même manière, $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, et la famille $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ est encore génératrice dans $\mathbb{R}^2$.

- Enfin, comme $\mathbf{e}_1$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\lambda\mathbf{e}_2$, la famille génératrice $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a un nombre minimal de vecteurs, et est donc **libre**.

1-4 Base d'un espace vectoriel de dimension finie

1-4.1 Définitions

Définition 1-4.1 *Espaces vectoriels de dimension finie.*
On dira qu'un espace vectoriel E sur le corps K est de dimension finie, s'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Définition 1-4.2 *Base d'un espace vectoriel de dimension finie.*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle base de E toute famille finie de vecteurs $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ libre et génératrice dans E.

Une telle famille n'est pas unique. Par contre, quand elles existent, toutes les bases d'un même espace vectoriel E possèdent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E.

Remarque : La notion de dimension est liée au corps sur lequel est construit l'espace vectoriel :

- L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{R}$ est de dimension 2, une base de cet espace étant, par exemple, $\{1, i\}$.
- L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{C}$ est de dimension 1, et une base en est $\{1\}$.

1-4.2 Propriétés

On a déjà vu que une base d'un espace vectoriel E de dimension finie est en particulier une famille génératrice de E, et donc que tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de cette base. En outre, à cause du caractère libre de cette famille, cette combinaison linéaire est unique :

Théorème 1-4.1 *Caractérisation des bases en dimension finie*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une famille finie de vecteurs de E est une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Exemples :

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace des matrices carrées 2×2 à coefficients réels, on appelle $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ est donc génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire $a = b = c = d = 0$. La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ est donc libre.

La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc de dimension 4.

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x + 3y - z = 0\}$. F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathbf{u} = (x, y, z) \in F$. On a donc : $z = 2x + 3y$. Ainsi, tout élément $\mathbf{u} \in F$ s'écrit :

$$\mathbf{u} = (x, y, 2x + 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3)\,.$$

On a montré que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2)$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)$ forment une famille génératrice de F, et (trivialement) libre dans F.

La famille $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est donc une base de l'espace vectoriel F, qui est par conséquent de dimension 2.

Théorème 1-4.2 *Théorème de la base incomplète*

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, et si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$, $p < n$, est une famille libre de E, alors on peut toujours trouver des vecteurs $\{\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ permettant de compléter cette famille de façon à obtenir une base de E.

La manière de compléter cette famille n'est pas unique.

Par voie de conséquence, on a le résultat suivant :

Proposition 1-4.1 *Dimension d'un sous espace vectoriel*

Si F est un s.e.v. d'un espace vectoriel E, alors

$$\dim F \leqslant \dim E\,.$$

Exemples :

- Soient, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (de dimension 4), $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ (sous-famille extraite d'une famille libre) est une famille libre, mais non génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il est évident que l'on peut compléter cette famille par $\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- On peut aussi compléter la famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ par la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{M}\}$ est génératrice. En effet, toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme :

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b+d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  De plus la famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{M}\}$ est libre. En effet :

  $$a\mathbf{E}_1 + b\mathbf{E}_2 + c\mathbf{E}_3 + d\mathbf{M} = \mathbf{0}$$

  équivaut à :

  $$\begin{pmatrix} a+d & b-d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  c'est à dire $\{a+d=0,\ b-d=0,\ c=0,\ d=0\}$, ou encore $a=b=c=d=0$.
  La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{M}\}$ est donc une autre base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1-5 Sommations sur les sous espaces vectoriels

Définition 1-5.1 *Si F et G sont deux s.e.v d'un même espace vectoriel E, on peut alors définir leur somme, elle même sous espace vectoriel de E :*

$$F+G=\{\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{u}\in F,\ \mathbf{v}\in G\}\ .$$

Soit $\mathcal{E}=F+G$. D'après la définitionn, tout élément de $\mathcal{E}$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Mais cette décomposition n'est, en général, pas unique.

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette décomposition soit unique est : $F\cap G=\{\mathbf{0}\}$. Dans ce cas cette somme sera dite *directe*. On écrira alors : $F\oplus G$.

Définition 1-5.2 *F et G étant deux s.e.v d'un même espace vectoriel E, et $\mathcal{E}=F+G$, on dit que $\mathcal{E}$ est somme directe de E et F si et seulement si $F\cap G=\{\mathbf{0}\}$.*
On écrit alors :

$$\mathcal{E}=F\oplus G$$

Dans ce cas, tout vecteur de $\mathcal{E}$ se décompose **de manière unique** en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cela signifie aussi que la réunion d'une base de F et d'une base de G est une famille libre de E et une base de $F\oplus G$.

Remarque : IMPORTANT
Dans le cas où $E=F\oplus G$, on dit que les sous espaces F et G sont supplémentaires.

Théorème 1-5.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E. On a :*

$$\dim F+G=\dim F+\dim G-\dim F\cap G$$

En particulier :

$$\dim F\oplus G=\dim F+\dim G$$

Définition 1-5.3 *Décomposition en somme directe.*
On dit que E est somme directe d'un nombre fini de s.e.v. de E, $F_1,F_2,\cdots,F_m$, si et seulement si tout vecteur $\mathbf{u}$ de E s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\cdots+\mathbf{u}_m,\ \text{avec}\ \mathbf{u}_i\in F_i,\ i\in\{1,2,\cdots,m\}\ .$$

Ainsi, une base de E est donnée par la réunion de bases de chacun des espaces F_i. On écrit alors :

$$E=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_m\,.$$

Conséquence : $\dim E = \sum_{k=1}^{m} \dim F_k$.

Exemples :

- Soit $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Si on pose : $E = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{u}\}$, $F = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, et $G = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, on peut alors écrire que $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$ mais seulement $\mathbb{R}^3 = F + G$.

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} a+d & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$.
  $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et toute matrice de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme :
  $$\begin{pmatrix} a+d & b-d \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  On appelle $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  La famille $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{M}\}$ est donc génératrice de $\mathcal{E}$. On sait que cette famille est libre et qu'elle est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donc que $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  Si l'on note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} d & -d \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_1$ est le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, et $\mathcal{E}_1$ est le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{\mathbf{M}\}$.

  On peut alors écrire :
  $$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2\,.$$

1-6 Applications linéaires

1-6.1 Définition et propriétés

Ce qui caractérise les espaces vectoriels, c'est leur stabilité par combinaison linéaire, et les applications les plus adaptées à cette structure sont les applications linéaires.

Définition 1-6.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps K.*

- *Toute application f de E dans F vérifiant*

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2,\ \forall \lambda \in K,\ f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$$

  est appelée application linéaire *de E dans F.*

  L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

- *Si l'ensemble de départ est le même que celui d'arrivée ($E = F$), on dit que f est un* endomorphisme*.*

  L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est noté $\mathcal{L}(E)$.

- *Si $F = K$, on dit que f est une* forme linéaire *sur E.*

Remarques :

- $(\mathcal{L}(E, F), +, \bullet)$ est lui même un espace vectoriel sur K.
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire.

1-6.2 Exemples

- L'application nulle qui à tout élément de E associe $\mathbf{0}_F$ est une application linéaire.
- L'application identitée de E, notée $\mathbf{I}_E$, est une application linéaire. C'est même un endomorphisme.
- L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x, y, z)) = (x', y'),\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{r} x' = x + y \\ y' = y + 2z \end{array} \right.$$

  est une application linéaire.

  En effet, soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et λ un réel. On a :

$$f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2))\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= (\lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2, \lambda y_1+y_2+2\lambda z_1+2z_2) \\ &= (\lambda(x_1+y_1)+(x_2+y_2), \lambda(y_1+2z_1)+(y_2+2z_2)) \\ &= \lambda(x_1+y_1, y_1+2z_1)+(x_2+y_2, y_2+2z_2) \\ &= \lambda f((x_1,y_1,z_1))+f((x_2,y_2,z_2)). \end{aligned}$$

- **Un contre exemple :** L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x,y,z)) = (x',y'), \text{ avec } \begin{cases} x' = xy \\ y' = y+2z \end{cases}$$

  n'est pas linéaire.

- **De même :** L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f((x,y,z)) = (x',y'), \text{ avec } \begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = y+2z \end{cases}$$

  n'est pas linéaire.

- L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f((x,y,z)) = x+y+2z$$

  est une forme linéaire.

Pour illustrer le fait que la notion d'application linéaire s'adresse aussi à des transformations qui ne portent pas uniquement sur des n-uplets de réels, voici deux exemples sur des **espaces de fonctions** (ce qui, par ailleurs, nous place en **dimension infinie**, et sort du cadre proprement dit de ce cours ...) :

- Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, alors l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout $f \in E$ associe

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

  est une forme linéaire. Cela résulte des propriétés de l'intégrale.

- Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors l'application de E dans E qui à tout $f \in E$ associe sa dérivée f' est linéaire. Cela résulte des propriétés de la dérivée.

1-7 Matrice d'une application linéaire

1-7.1 Introduction par un exemple

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x',y'), \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 2y \\ y' = 4x - 5y \end{array} \right.$$

f étant un endomorphisme, on prend la même base dans l'ensemble de départ et dans celui d'arrivée. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ (l'image de tout autre vecteur se déduisant directement par linéarité). Dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées de $f(\mathbf{e}_1)$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et de $f(\mathbf{e}_2)$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

La matrice de f, dans cette base, est alors :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ est une matrice ayant 2 lignes et 2 colonnes, et l'on écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x - 5y \end{pmatrix}.$$

dans lequel interviennent les produits de matrices que nous verrons plus tard.

1-7.2 Généralisation

Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension n vers un espace vectoriel F de dimension p, f est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base de E. Ces images étant dans F, elles peuvent s'exprimer de façon unique dans une base de F donnée. Fixons donc une base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de E, et $B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$ une base de F.

Du fait de la linéarité de f, les coordonnées des vecteurs $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$ définissent parfaitement f. Ces coordonnées définissent un tableau ayant n colonnes : les coordonnées des n vecteurs $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$, et p lignes (chacun de ces vecteurs ayant p coordonnées dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\}$). Ce tableau est appelé matrice de f et dépend des bases choisies dans E et F. On écrira :

$$\mathbf{M}^f_{B;B'} \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{M}_{B'}\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}.$$

Exemple : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$, de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, dans $\mathbb{R}^2$, de base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, et définie par :

$$f((x, y, z)) = (x', y'), \text{ avec } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + 2z \, . \end{cases}$$

On calcule : $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)$ dans la base canonique $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Dans les bases canoniques, $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et f a pour matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

1-8 Matrices d'un même opérateur dans des bases différentes – Equivalence matricielle

1-8.1 Introduction par un exemple

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$, de base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, dans $\mathbb{R}^3$, de base canonique $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$.

Dans les bases canoniques, $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et f a pour matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons deux nouvelles bases :

$$\left\{\mathbf{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^2, \text{ et } \left\{\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Déterminons alors la matrice $\mathbf{B}$ de f dans ces nouvelles bases. Il suffit, pour cela, de trouver les coordonnées de $f(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{v})$ dans la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$.

On exprime, tout d'abord, $f(\mathbf{u})$ dans la base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$, on obtient :

$$f(\mathbf{u}) = f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2)$$

car f est linéaire. Ainsi,

$$f(\mathbf{u}) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De même, dans la base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$, $f(\mathbf{v})$ a pour coordonnées

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut, ensuite, exprimer $f(\mathbf{u})$ et $f(\mathbf{v})$ dans la base $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$. Pour cela, il faut exprimer $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$ en fonction de $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{array} \right. ,$$

d'où on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = -\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \end{array} \right. .$$

Enfin, après calcul, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{u}) = 6\boldsymbol{\alpha} - 3\boldsymbol{\beta} - 4\boldsymbol{\gamma} \\ f(\mathbf{v}) = 4\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} - 3\boldsymbol{\gamma} \end{array} \right. ,$$

et la nouvelle matrice de f dans ces nouvelles bases est :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} .$$

On dit que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont **équivalentes**. Cela signifie qu'elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

1-9 Image et noyau d'une application linéaire

1-9.1 Définitions et propriétés

La compatibilité intrinsèque des applications linéaires avec la notion de combinaison linéaire, fait que :

- L'image d'un s.e.v par une application linéaire est un espace vectoriel.
- L'image réciproque d'un s.e.v par une application linéaire est aussi un espace vectoriel.

En particulier, on définit des sous espaces vectoriels très importants pour la suite :

Définition 1-9.1 Noyau et image d'une application linéaire
Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.

- *Le noyau de f, noté $\mathsf{Ker}\, f$, est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F,*
$$\mathsf{Ker}\, f = \{\mathbf{u} \in E\,,\ f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}\ .$$
- *L'image de f, notée $\mathsf{Im}\, f$, est l'ensemble des images dans F des vecteurs de E par l'application f,*
$$\mathsf{Im}\, f = \{\mathbf{v} \in F \text{ t.q. } \exists \mathbf{u} \in E\,,\ \mathbf{v} = f(\mathbf{u})\}\ .$$

Une application utile : On détermine souvent $\mathsf{Ker}\, f$ pour savoir si l'application linéaire f est ou non injective. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 1-9.1 *Soit f une application linéaire. On a l'équivalence suivante :*

$$\mathsf{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\} \iff f \text{est injective}\ .$$

1-9.2 Exemples

1. Soit E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et soit l'application :
$$f\ :\quad \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx\,. \end{array}\right.$$
f est de façon évidente linéaire (du fait des propriétés de l'intégrale).
$\mathsf{Ker}\, f$ est l'ensemble $\left\{g \in E\ :\ \displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx = 0\right\}$. C'est un espace de dimension infinie.
Par contre $\mathsf{Im}\, f = \mathbb{R}$, et est de dimension 1.

2. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z - \overline{z}$

   $\mathsf{Ker}\, f$ est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z = \overline{z}\} = \mathbb{R}$. C'est un espace de dimension 1.

   Et $\mathsf{Im}\, f = i\,\mathbb{R}$. C'est aussi un espace de dimension 1.

3. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice associée (dans les bases canoniques) :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   $\mathsf{Ker}\, f$ (ou, de manière équivalente, $\mathsf{Ker}\, \mathbf{A}$) est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, c'est à dire, matriciellement parlant, tels que :

$$\mathbf{Au} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   C'est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\mathsf{Ker}\, f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

   C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

   On peut vérifier, en outre, que $\mathsf{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ tout entier, parce que

$$\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

   ensemble de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dans lequel les deux premiers, par exemple, sont trivialement libres ...

1-10 Notions de Rang

1-10.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 1-10.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle rang d'un système ou d'une famille de vecteurs de E, le nombre de vecteurs de la plus grande famille libre extraite de ce système. C'est aussi la dimension du vectorialisé de ce système de vecteurs, c'est à dire la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.*

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit la famille

$$\left\{ \mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Remarquons au préalable que la dimension de $\mathbb{R}^3$, qui vaut 3, majore le rang de toute famille incluse dans cet espace, et donc que sur les quatre vecteurs de cette famille, il y en a forcément au moins un qui est colinéaire aux autres.

De façon immédiate, $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ ne sont pas colinéaires, leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles.

Regardons si $\mathbf{e}_3$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$. Cherchons s'il existe deux scalaires a et b tels que : $\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Ceci nous conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} 4 &= a - b \\ 2 &= 2a \\ -7 &= 2a + 3b \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -3\,. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, $\mathbf{e}_3 \in \mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Voyons enfin si $\mathbf{e}_4$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$. Cherchons s'il existe deux scalaires a et b tels que : $\mathbf{e}_4 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Ceci nous conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} 5 &= a - b \\ -2 &= 2a \\ 0 &= 2a + 3b \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -6 \\ 0 &= 2 - 18\,. \end{aligned} \right.$$

Ce système est incompatible, et il n'y a pas de solutions. Finalement, $\mathbf{e}_4 \notin \mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$ est une famille libre.

En conclusion :

$$\mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = \mathit{Vect}\,\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}\ ,$$

qui est donc un espace vectoriel de dimension 3.

En fait, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$ est la plus grande famille libre extraite de la famille initiale, et $\mathit{rang}\ \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = 3$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, soit la famille

$$\left\{ \mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -36 \\ 72 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

De façon immédiate, $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont colinéaires, puisque $12\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$. Par conséquent, $\mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1\}$.

Ensuite, on remarque que $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_3$ ne sont pas colinéaires, leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles et donc $\mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$.

Regardons enfin si $\mathbf{e}_4$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_3$. On voit facilement que $\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, d'où on peut conclure que $\mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = \mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$.

Ainsi

$$\mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = \mathit{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\} ,$$

qui est donc un espace vectoriel de dimension 2. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ est la plus grande famille libre extraite de la famille initiale, et $\mathit{rang}\ \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\} = 2$.

1-10.2 Rang d'une application linéaire

Définition 1-10.2 *Le rang d'une application linéaire f de E dans F, deux espaces vectoriels de dimension finie, est la dimension du sous espace vectoriel $\mathit{Im}\, f$ dans F :*

$$\mathit{rang}\ f = \dim(\mathit{Im}\, f)\,.$$

Définition 1-10.3 *Si $\boldsymbol{A}$ est la matrice de l'application linéaire f, le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$, est le rang de l'application linéaire f, c'est aussi le rang du système des vecteurs colonnes de cette matrice.*

Le théorème suivant lie les dimensions de l'image et du noyau d'une application linéaire :

Théorème 1-10.1 ***Théorème du rang***
Si f est une application linéaire de E dans F, deux espaces vectoriels de dimension finie, on a alors :

$$\dim(E) = \mathit{rang}\ f + \dim(\mathit{Ker}\, f)\,.$$

Exemples :

1. Soit f l'application linéaire de $E = \mathbb{R}_3[X]$ dans $F = \mathbb{R}_2[X]$, qui à chaque polynôme associe sa dérivée :

$$f(P) = P'\,.$$

Une famille génératrice de $\mathit{Im}\, f$ est formée des images par f des vecteurs d'une base de E, par exemple $\{1, X, X^2, X^3\}$. A cet égard, on a :

$$f(1) = 0\,, \quad f(X) = 1\,, \quad f\left(X^2\right) = 2X\,, \quad f\left(X^3\right) = 3X^2\,.$$

$\{f(X)\,,\ f(X^2)\,,\ f(X^3)\}$ est de manière évidente une famille libre dans $F = \mathbb{R}_2[X]$. $f(1)$ étant nul, il est nécessairement lié aux autres et, par conséquent, le rang de cette famille de vecteurs est 3 d'où $\mathit{rang}\, f = \dim(\mathit{Im}\, f) = 3$.

Déterminons maintenant $\mathit{Ker}\, f$. C'est l'ensemble des polynômes ayant une dérivée nulle, c'est à dire tous les polynômes constants et, par conséquent, $\mathit{Ker}\, f = \mathit{Vect}\,\{1\}$. Ainsi, $\dim(\mathit{Ker}\, f) = 1$ et on a bien $\dim(E) = 4 = \mathit{rang}\, f + \dim(\mathit{Ker}\, f) = 3 + 1$.

2. Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et soit l'application :

$$f\ :\quad \left\{\begin{array}{lcl} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx\,. \end{array}\right.$$

L'application f est de façon immédiate linéaire (du fait des propriétés de l'intégrale).

$\mathit{Ker}\, f$ est l'ensemble

$$\left\{P \in E,\ \text{ t.q. } \int_0^1 P(x)\,dx = 0\right\}.$$

Si on note $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\,,$$

et $P \in \mathit{Ker}\, f$ si et seulement si $c = -(a/3) - (b/2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathit{Ker}\, f &= \left\{P \in E,\ P(x) = a(x^2 - \frac{1}{3}) + b(x - \frac{1}{2})\right\} \\ &= \mathit{Vect}\left\{(x^2 - \frac{1}{3})\,,\ (x - \frac{1}{2})\right\}. \end{aligned}$$

On obtient donc $\dim(\mathit{Ker}\, f) = 2$. Or $\dim E = 3$, donc d'après le théorème du rang, on peut écrire :

$$\dim E = \dim(\mathit{Ker}\, f) + \mathit{rang}\, f \quad \text{soit} \quad \mathit{rang}\, f = 3 - 2 = 1\,.$$

3. Considérons $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel (donc de dimension 2), et soit f l'application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + \overline{z}$. Si nous posons $z = a + ib$, alors $f(z) = a + ib + a - ib = 2a$. Ainsi $\mathit{Im}\, f = \mathbb{R}$ et $\mathit{rang}\, f = 1$, et d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{C}) = 1 + \dim(\mathit{Ker}\, f)\,.$$

Par conséquent, $\dim(\mathit{Ker}\, f) = 1$, et nous en déduisons que f n'est pas injective.

1-11 Des représentations graphiques, pour aider à assimiler

L'ensemble V des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ nous a permis d'introduire la notion d'espace vectoriel. La représentation graphique des espaces vectoriels sous forme d'ensemble de vecteurs peut aider à la compréhension de cette structure.

- Représentation d'une droite vectorielle (espace vectoriel de dimension 1)

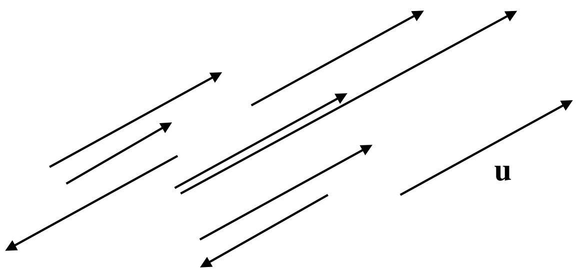

Figure 1-11.1: Tous les vecteurs de la droite vectorielle $\mathcal{D}$ sont colinéaires à $\mathbf{u}$

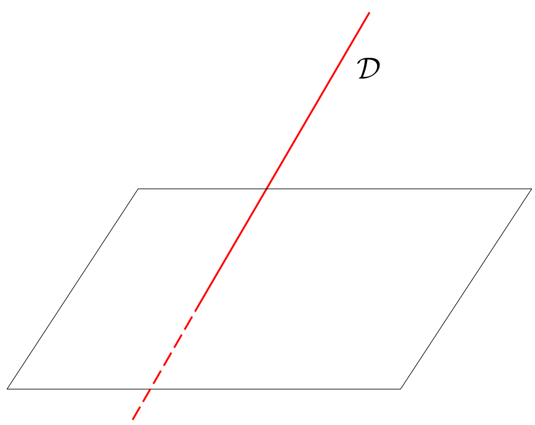

Figure 1-11.2: Autre représentation de la droite vectorielle $\mathcal{D}$

- Représentation d'un plan vectoriel (espace vectoriel de dimension 2)

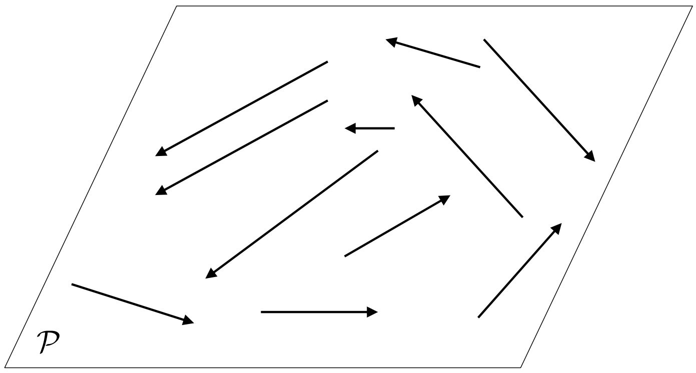

Figure 1-11.3: Trois vecteurs de $\mathcal{P}$ forment obligatoirement une famille liée

- Familles liées dans $\mathbb{R}^2$: les familles $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\{\mathbf{U}, \mathbf{0}\}$ sont des familles liées

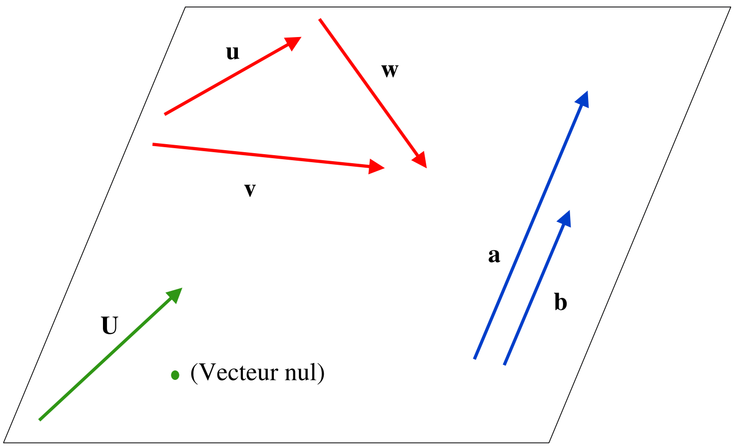

Figure 1-11.4: Familles liées dans le plan

- Familles libres dans $\mathbb{R}^2$: les familles $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ et $\{\mathbf{U}\}$ sont des familles libres

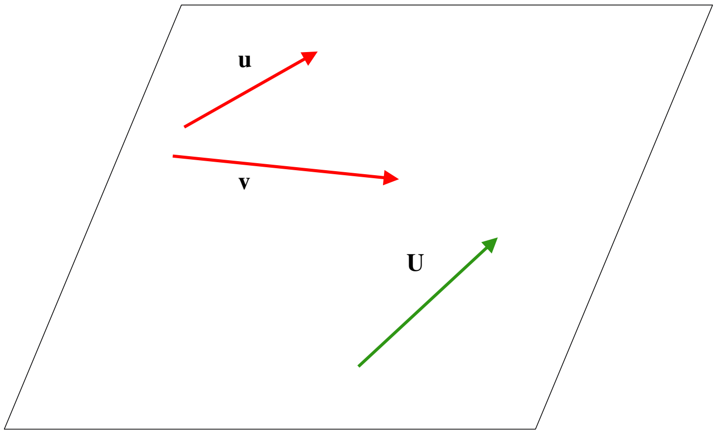

Figure 1-11.5: Familles libres dans le plan

- Familles libres dans $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel de dimension 3) : si le vecteur $\mathbf{w}$ n'appartient pas au plan engendré par $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Il est à noter que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ et $\{\mathbf{w}\}$ sont aussi des familles libres de $\mathbb{R}^3$.

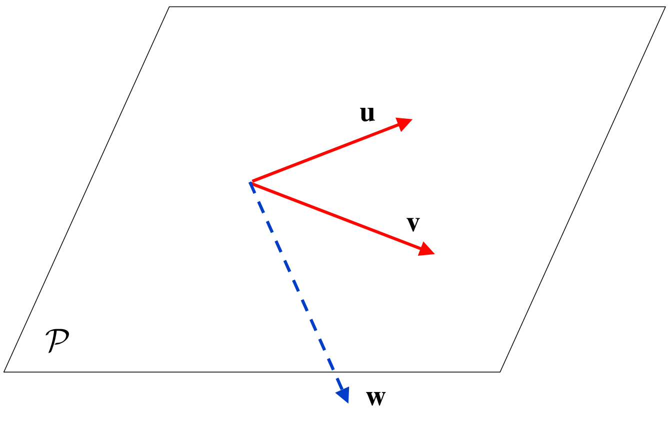

Figure 1-11.6: Familles libres dans $\mathbb{R}^3$

- Somme directe dans $\mathbb{R}^2$: tout vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur $\mathbf{U}$ de $\mathcal{D}_1$ et d'un vecteur $\mathbf{V}$ de $\mathcal{D}_2$.

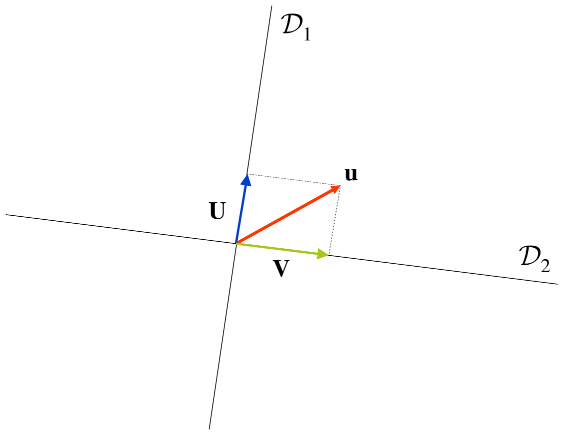

Figure 1-11.7: $\mathbb{R}^2$ est somme directe de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

- Somme directe dans $\mathbb{R}^3$: tout vecteur $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur $\mathbf{U}$ de $\mathcal{D}$ et d'un vecteur $\mathbf{V}$ de $\mathcal{P}$.

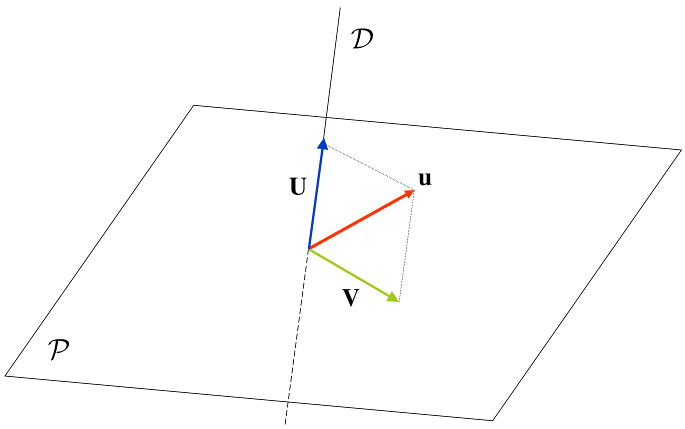

Figure 1-11.8: $\mathbb{R}^3$ est somme directe de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$