Lexique

Dans ce lexique nous avons essayé de définir quelques unes des notions et fonctions que vous allez fréquemment rencontrer tout au long de ce module. Il n'est sans doute pas complet, n'hésitez pas a nous signaler tout autres notions que vous souhaiteriez y voir figurer.

Indicatrice : La fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$ est la fonction qui a pour valeur 1 si $x \in [a, b]$ et 0 si $x \notin [a, b]$. Elle correspond a la *fonction porte* en Théoriedu Signal. Elle peut être notée de plusieurs manières. Voici une liste non exhaustive : $\mathbb{I}_{[a,b]}$, $I_{[a,b]}$, $\Pi_{[a,b]}$ ...
En résumé

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{[a,b]}(x) = 1 \text{ si } x \in [a, b] \\ \mathbb{I}_{[a,b]}(x) = 0 \text{ si } x \notin [a, b] \end{cases} \tag{1}$$

Exemple : Tracons $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$, l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$. Son graphe est représenté sur la figure 1.

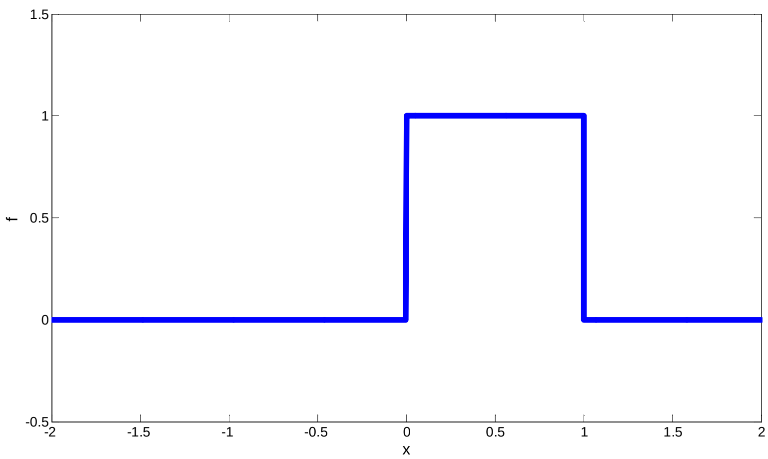

FIG. 1 – Graphe de l'indicatrice de $[0, 1]$

On définit de façon analogue la fonction indicatrice de n'importe quel sous ensemble de $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{I}_E$

pour $E \subset \mathbb{R}$.

Fonction échelon : La fonction échelon est la fonction qui est égale à 0 lorsque x est négatif et égale à 1 quand x est positif ou nul (voir son graphe sur la figure). Elle est aussi appelée fonction de

Heaviside. Elle peut être notée de différentes manières, par exemple : $H(x)$, $u(t)$, $y(t)$. Alors

$$\begin{cases} H(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

La figure 2 présente le graphe de la fonction échelon. On peut noter que la fonction indicatrice peut-être écrite comme la différence de deux fonctions échelon. Par exemple si on considère la fonction indicatrice de la figure 1, on peut écrire que :

$$\mathbb{I}_{[0,1]}(x) = H(x) - H(x-1)$$

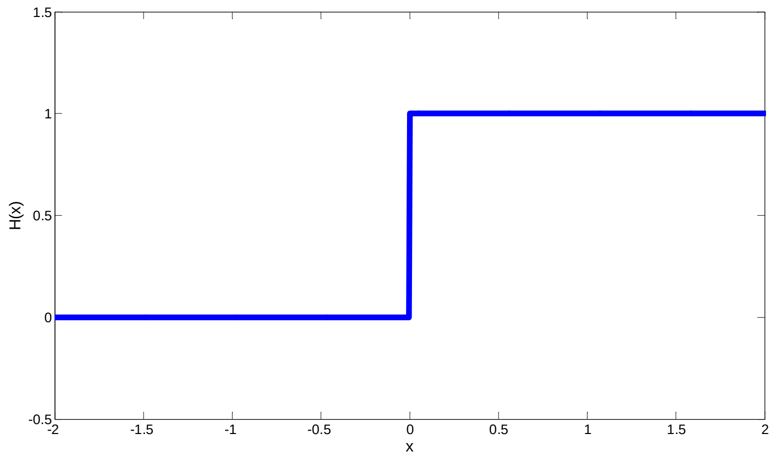

FIG. 2 – Graphe de la fonction échelon.

Intervalle : Il existe trois types d'intervalle dans $\mathbb{R}$: ouvert, semi-ouvert et fermé. Considérons a et b réels pour l'instant, on traitera le cas $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) ensuite.

Un intervalle **ouvert**, notée $]a, b[\in \mathbb{R}$, correspond à l'ensemble des nombres réels strictement plus petits que b et strictement plus grands que a. En notation mathématique, un intervalle ouvert s'écrit :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$$

Il est à noter que dans le cas d'un intervalle ouvert, les bornes, ici a et b, n'appartiennent pas à l'intervalle, donc x ne peut pas être égal à a ou b.

Un intervalle semi-ouvert, qui peut être de la forme $[a, b[$ (respectivement de la forme $]a, b]$), correspond à l'ensemble des nombre réels qui sont supérieurs ou égaux (respectivement strictement supérieur) à a et strictement inférieurs (respectivement inférieur ou àgal) àb. En terme mathématique, un intervalle semi-ouvert s'écrit :

$$\begin{aligned} [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x < b\} \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leq b\} \end{aligned}$$

Un intervalle **fermé**, notée $[a, b]$, correspond à l'ensemble des nombres réels supérieur ou égal à a et inférieur ou égal à b. En terme mathématique, un intervalle fermée s'écrit :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$$

Dans ce cas, x peut égal à chacune des bornes de l'intervalle.

Si l'une des bornes est **infinie,** l'intervalle est **toujours** ouvert du côté de cette borne : $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$.

Intervalle compact : Un intervalle I de $\mathbb{R}$ sera dit **compact** ssi I est fermé et borné (*i.e.* a et b finis) : $I = [a, b]$.

Maximum/Minimum/ Borne supérieure/borne inférieure. Considérons une fonction f de la variable x définie sur l'intervalle I. **S'il existe un** $x_0 \in I$ tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

on dit que la fonction f atteint son maximum en x_0 et on définit :

$$\max_{x \in I}(f) = f(x_0).$$

Attention, comme on le verra dans l'exemple suivant, un tel x_0 n'existe pas nécessairement. Par contre, il peut aussi y avoir plusieurs valeurs de x, pour lesquels le maximum est atteint (imaginer une courbe en dents de scie, avec des pointes à la même hauteur).

On a une notion analogue pour le minimum.

Le maximum (ou le minimum) n'existe pas dans tous les cas. Par exemple si la fonction tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$), on ne pourra pas définir de maximum (resp minimum). Le maximum ou minimum peut aussi ne pas exister pour d'autres raisons. Voyons un exemple d'un tel cas :

Exemple 1 *Considérons la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle semi-ouvert $I = [-1, 2[$ (faire un dessin). La fonction f est croissante, donc f sera maximum lorsque x est maximum dans I. Quelle est la plus grance valeur que x peut prendre ? Comme l'intervalle est semi-ouvert, x sera "très proche" de 2, mais ne pourra jamais être égal à 2 puisque 2 n'appartient pas à I. Il n'est pas donc pas possible de définir quelle est la plus grande valeur de x car il doit être aussi proche de 2 que possible sans être égal à2. Donc dans ce cas, f n'a pas de maximum sur I.*

*On parlera alors de **borne supérieure** de f sur I. Nous ne donnons pas la définition abstraite, un peu délicate, contentons nous de "constater" que :*

$$\sup_{x \in I} f(x) = 2$$

Par contre, il est possible de définir le minimum de f. Toujours du fait de la monotonie croissante de f, le minimum sera atteint pour la plus petite valeur de x. Comme l'intervalle est fermé en -1, x

prendra la valeur -1, donc le minimum de f correspondra à $f(-1)$.

$$\min_{x \in I} f(x) = -1.$$

Supposons que nous considérions maintenant $J =]-1, 2[$ et la même fonction. Pour la même raison que précédemment, nous n'avons pas de minimum de f sur J, mais une ***borne inférieure***

$$\inf_{x \in I} f(x) = -1$$

La différence entre Max et Min, et Sup et Inf est que dans le premier cas, ces valeurs sont atteintes en un point (au moins) et dans le second, pas nécessairement.

Pour finir, voyons un autre example :

Exemple 2 *Considérons la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ sur l'intervalle fermé $I = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Nous devons étudier les variations de la fonction f. Pour cela, calculons d'abord sa dérivée :*

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Cette dérivée s'annulle lorsque $x = -1$ et lorsque $x = 1$. Nous obtenons le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{3}{2}$		-1		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	*f(-1.5)*	↗	*f(-1)*	↘	*f(1)*	↗	*f(1.5)*

A partir de ce tableau, nous pouvons déduire que le minimum de f sera soit $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ ou $f(1)$. On trouve que $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$ et que $f(1) = -\frac{2}{3}$. Donc

$$\min_{x \in I} f = -\frac{2}{3}$$

Le maximum sera soit $f(-1)$ soit $f\left(\frac{3}{2}\right)$. On a $f(-1) = \frac{2}{3}$ et que $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$. Donc

$$\max_{x \in I} f = \frac{2}{3}$$

Ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont **continues** en tout point de $\mathbb{R}$.

Dans le cas où la fonction est définie sur une partie de $\mathbb{R}$, par exemple un intervalle I, et si cette fonction est continue en tout point de I, alors elle appartiendra à l'ensemble des fonctions continues sur I, noté $\mathcal{C}(I)$.

Exemple 3 *Les fonctions* $\exp(x)$, x^{α} *avec* $\alpha \geq 0$, *les fonctions trigonométriques font parties de* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. *La liste précédente n'est bien evidemment pas exhaustive.*

Ensemble $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont **dérivables et de dérivée continue** en tout point de $\mathbb{R}$.

Nous avons $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Bien entendu, nous n'avons pas égalité entre ces deux ensembles. Il suffit de considérer la fonction $f(x) = |x|$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. C'est clair sur le graphe : en $x = 0$ on a une demi tangente à droite de pente $+1$ et une demi tangente à gauche de pente -1. En termes de dérivée, ceci se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{c} \lim_{h\to 0 \text{ avec } h>0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0 \text{ avec } h<0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1 \end{array} \right.$$

Comme dans le cas de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, on peut définir un ensemble des fonctions dérivables et de dérivée continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Ensemble $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont k-fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et chacune de ces dérivées est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont indefiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Un exemple d'une telle fonction est $\exp(x)$.

Nous avons les relations d'inclusion suivantes entre les différents ensembles de fonctions continues :

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

On dit que les fonctions de ces espaces sont de plus en plus **régulières.**

Support d'une fonction : Soit f une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$. Le support de f est l'ensemble des x tel que $f(x)$ soit non nul . En language mathématique, le support de f est définie par :

$$Supp(f) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$$

Remarque 4 *Pour des raisons de commodité, si l'ensemble précedent est un intervalle ouvert ou semi-ouvert, ou une réunion de tels intervalles, on adjoint les bornes des intervalles dans le support. En langage imagé, on ferme l'ensemble !*

Fonction à support compact : C'est une fonction dont le support est un intervalle fermé et borné.

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$: C'est l'ensemble des réels auquel on adjoint les deux éléments + et - l'infini, i.e. :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Il est aussi possible de définir $\overline{\mathbb{R}}^+$ et $\overline{\mathbb{R}}^-$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}}^+ &= \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ \overline{\mathbb{R}}^- &= \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\} \end{aligned}$$

Ensemble complémentaire : Considérons un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Le complémentaire de l'ensemble A dans $\mathbb{R}$, noté A^c, est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans A.