

Quatrième semaine de travail : Révision

Exercices corrigés

Cette feuille regroupe quelques exercices de révisions (succinctement corrigés) sur la convergence dominée et la transformée de Fourier.

Exercice 1 : Séries de Fourier - Phénomène de Gibbs

On met en évidence dans l'exercice suivant le **phénomène de Gibbs** : au voisinage d'une discontinuité de la fonction, un phénomène **d'aigrettes** peut se produire, lié à l'absence de convergence uniforme. C'est un phénomène gênant en signal qui provient de la difficulté d'approximer un signal discontinu par des polynômes trigonométriques.

On considère la fonction impaire et 2π -périodique f définie par $f(x) = 1$ pour $x \in]0, \pi[$.

1) Calculer les coefficients $b_n(f)$ pour $n \geq 1$.

2) Vérifier que pour $t \in]0, \pi[$ on a

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} \quad (1)$$

Que se passe-t-il en $t = 0$?

3) On considère les sommes partielles

$$S_p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

Calculer $S'_p(t)$ et vérifier, en considérant la somme de la série géométrique de raison e^{2it} , que

$$S'_p(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2pt)}{\sin t}$$

4) En déduire que

$$S_p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2pu)}{\sin u} du$$

5) Etudier à l'aide de sa dérivée, l'allure de la courbe associée à $S_p(t)$ sur $]0, \pi[$ et montrer que le premier maximum local de $S_p(t)$ est atteint en $t = \frac{\pi}{2p}$ et vaut donc

$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \frac{\sin(2pu)}{\sin u} du$. Montrer qu'il peut s'écrire

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \gamma}{\sin \frac{\gamma}{2p}} \frac{d\gamma}{2p}$$

En admettant que (passage à la limite dans l'intégrale...)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma \simeq 1.179$$

vérifier que : $\sup_{t \in [0, \pi]} |S_p(t) - f(t)|$ **ne tend pas vers 0 quand** $p \rightarrow \infty$ **et que de plus, les sommes partielles** $S_p(t)$ **dépassent toujours** $f(t)$ **au voisinage de 0.**

Correction

1) La fonction f étant impaire, on a $a_n = 0, \forall n$. Nous devons donc calculer les coefficients b_n (qui correspondent à la décomposition sur les sinus). La définition de ces coefficients nous donne :

$$b_n(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt \text{ pour } n \geq 1 \quad (2)$$

avec a la période de f . Dans notre cas, nous avons $a = 2\pi$.

Appliquons la valeur de la période et développons les calculs de (2), nous obtenons :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (3)$$

Remark 1 : *l'intégrale doit être calculée sur une période mais pas forcément entre 0 et 2π . La seule contrainte sur le domaine d'intégration est qu'il soit de mesure 2π . Ainsi, nous pouvons choisir l'intervalle qui facilite les calculs. Dans l'expression précédente, nous choisissons $[-\pi, +\pi]$*

Revenons au calcul des coefficients b_n . Nous découpons l'intégrale en deux sous-intervalles : $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ (ces deux intervalles correspondent aux domaines où f est continue), nous obtenons donc :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) \quad (4)$$

Puisque $f(x)$ vaut $+1$ sur l'intervalle $]0, \pi[$ et f impaire, nous trouvons :

$$f(x) = -1, \quad \forall x \in]-\pi, 0[$$

Nous remplaçons f par son expression dans chaque sous-domaine :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right)$$

Or :

$$\int_a^b \sin(nt) dt = -\frac{\cos nt}{n} \Big|_a^b = \frac{\cos na - \cos nb}{n}$$

Pour la première intégrale du membre de droite de (4) $a = -\pi$ et $b = 0$, ce qui donne :

$$- \int_{-\pi}^0 \sin(nt) dt = -\frac{\cos n\pi - \cos n0}{n} \quad (5)$$

Or pour les multiples pairs de π , $\cos n\pi = 1$ et pour les multiples impairs, $\cos n\pi = -1$. Nous pouvons réunir ces deux cas avec l'écriture suivante :

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

(5) devient donc :

$$-\int_{-\pi}^0 \sin(nt) dt = -\frac{(-1)^n - 1}{n} \quad (6)$$

Pour la deuxième intégrale de (4) $a = 0$ et $b = \pi$, ce qui donne :

$$\int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{\cos n0 - \cos n\pi}{n}$$

En utilisant la même démarche que pour la première intégrale, nous obtenons :

$$\int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (7)$$

En combinant (6) et (7), nous obtenons la valeur des coefficients b_n :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n - 1}{n} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Séparons le cas où n est pair du cas où n est impair. Dans le cas pair ($n = 2p$), nous avons $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$ et donc :

$$\mathbf{b}_{2p}(f) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - 1}{n} = 0$$

Pour n impair, i.e. $n = 2p + 1$ avec p entier naturel, nous avons

$$(-1)^n = (-1)^{2p+1} = (-1)^{2p}(-1) = -1$$

ce qui donne :

$$\mathbf{b}_{2p+1}(f) = \frac{4}{\pi(2p+1)} \quad (8)$$

Remark 2 : l'intégrale définissant les coefficients b_n aurait pu être déterminée plus rapidement. En effet, elle fait intervenir sous le signe intégrale le produit de deux fonctions impaires ($f(t)$ et $\sin nt$). Nous aurions donc pu écrire (3) de la manière suivante :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

L'intégrale intervenant dans cette dernière expression a été calculée plus haut. En reportant la valeur déterminée, nous retrouvons le même résultat.

2) La relation que nous devons démontrer peut être écrite, en remarquant que 1 est égal à la valeur de la fonction f sur l'intervalle considéré :

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

De plus, dans le terme de droite, nous reconnaissons la somme du produit des coefficients de Fourier de f avec les fonctions sinus. Nous avons donc la décomposition en série de Fourier de f . Ainsi, l'égalité à démontrer revient à montrer que la décomposition en série de Fourier est égale "point à point" avec f .

Pour arriver à ce résultat, nous avons le théorème de Dirichlet. Nous allons essayer de vérifier les hypothèses de ce théorème, c'est-à-dire voir si f est périodique (par définition) et si elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur une période.

Une fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle est continue par morceaux, dérivable et de dérivée continue par morceaux. Dans notre cas, sur $]-\pi, +\pi[$, f ne présente qu'un seul point de discontinuité en $t = 0$. Nous devons donc examiner si f est continue, dérivable et de dérivée continue sur les intervalles $]-\pi, 0[$ et $]0, +\pi[$. Sur ces deux intervalles, elle est constante (égale à -1 ou $+1$), elle est donc bien continue par morceaux, dérivable et de dérivée nulle sur tout son intervalle de définition.

Elle est donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux, nous pouvons appliquer le théorème de Dirichlet. Comme c'est un théorème ponctuel, nous nous plaçons en un point de l'intervalle de définition, soit donc $t_0 \in]-\pi, \pi[$. En introduisant les sommes partielles :

$$f_N(t_0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nt_0$$

nous avons donc :

$$f_N(t_0) \rightarrow \frac{1}{2} [f(t_{0+}) + f(t_{0-})] \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (9)$$

où $f(t_{0+})$ (resp. $f(t_{0-})$) dénote la limite à droite (resp. à gauche) de f en t_0 .

Or sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, la fonction f est continue, les limites à droite et à gauche en t_0 sont égales, donc le résultat (9) s'exprime sous la forme :

$$f(t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n \sin nt_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt_0 \quad (10)$$

Restreignons le résultat précédente à l'intervalle $]0, \pi[$. Sur ce domaine, la fonction f est égale à 1 quelle que soit la valeur de t , (10) devient :

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt_0$$

Remplaçons à présent les b_n par l'expression (8). Finalement, nous obtenons :

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

En $t = 0$, les sinus, quel que soit la valeur de n , sont nuls. Donc les sommes partielles sont égales à 0, leur limite aussi. Pour la fonction f , la limite à droite en 0 est égale à la valeur de f sur l'intervalle $]0, \pi[$ (car elle est constante sur ce domaine), soit :

$$f(0_+) = 1$$

La limite à gauche quant à elle vaut :

$$f(0_-) = -1$$

La moyenne des deux limites est bien égale à 0 qui correspond à la valeur de la décomposition en série de Fourier prise pour $t = 0$.

3) Soit :

$$S_p = S_p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$$

les sommes partielles de la décomposition en série de Fourier.

Pour calculer la dérivée de S_p , il suffit de dériver terme à terme.

ATTENTION!! : Nous pouvons effectuer une dérivation terme à terme sans autre justification uniquement parce que nous travaillons sur une somme finie de termes. Si nous avions une série (i.e. la sommation d'un nombre infini de termes), nous ne pourrions pas dériver sans étudier précisément la nature de la convergence de la série.

La dérivée d'un sinus est un cosinus. En tenant compte de la fonction linéaire contenue dans le sinus, nous avons :

$$\begin{aligned} [\sin(2k-1)t]' &= (2k-1) \cos(2k-1)t \\ \Rightarrow S'_p &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^p \cos(2k-1)t \end{aligned} \quad (11)$$

Le calcul de la dérivée de la somme partielle de rang p se ramène donc à déterminer la valeur d'une somme de cosinus.

Le cosinus peut être vu comme la partie réelle d'une exponentielle complexe, soit :

$$\cos(2k-1)t = \mathcal{R}e \left(e^{j(2k-1)t} \right)$$

En injectant cette relation pour chaque terme de la somme dans la relation (11), nous obtenons :

$$S'_p = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^p \cos(2k-1)t = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^p \mathcal{R}e \left(e^{j(2k-1)t} \right)$$

La somme des parties réelles étant égale à la partie réelle de la somme des termes, nous pouvons réécrire la relation précédente sous la forme :

$$S'_p = \frac{4}{\pi} \mathcal{R}e \left(\sum_{k=1}^p e^{j(2k-1)t} \right) \quad (12)$$

Le terme de droite correspond à la somme des termes d'une suite géométrique. Or nous avons le résultat, pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison q :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} q^k = \frac{1 - q^p}{1 - q} \quad (13)$$

Dans notre cas si nous développons l'écriture de la somme, nous avons :

$$\sum_{k=1}^p e^{j(2k-1)t} = e^{jt} + e^{3jt} + e^{5jt} + \dots + e^{(2p-1)t} \quad (14)$$

Pour faire apparaître la forme de la relation (13), il faut mettre en facteur e^{jt} , (14) devient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^p e^{j(2k-1)t} &= e^{jt} \left(1 + e^{2jt} + e^{4jt} + \dots + e^{(2p-2)jt} \right) \\ &= e^{jt} \left(1 + e^{2jt} + (e^{2jt})^2 + \dots + (e^{2jt})^{p-1} \right) \\ &= e^{jt} \sum_{k=0}^{p-1} (e^{2jt})^k\end{aligned}$$

En appliquant le résultat (13), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^p e^{j(2k-1)t} &= e^{jt} \times \frac{1 - e^{j2pt}}{1 - e^{j2t}} \\ &= e^{jt} \times \frac{e^{+jpt}}{e^{+jt}} \frac{e^{-jpt} - e^{jpt}}{e^{-jt} - e^{jt}}\end{aligned}\quad (15)$$

En utilisant la définition du sinus en fonction d'exponentielles complexes :

$$\sin u = \frac{e^{ju} - e^{-ju}}{2j}$$

la relation (15) devient :

$$\sum_{k=1}^p e^{j(2k-1)t} = e^{jt} \times \frac{e^{+jpt}}{e^{+jt}} \frac{\sin pt}{\sin t} = e^{jpt} \frac{\sin pt}{\sin t} \quad (16)$$

Injectons (16) dans (12) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}S'_p &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(e^{jpt} \frac{\sin pt}{\sin t} \right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left((\cos pt + j \sin pt) \frac{\sin pt}{\sin t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(\cos pt \frac{\sin pt}{\sin t} + j \sin pt \frac{\sin pt}{\sin t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \cos pt \frac{\sin pt}{\sin t}\end{aligned}$$

Or, en utilisant la relation de trigonométrie :

$$\sin 2pt = 2 \sin pt \cos pt$$

S'_p devient finalement :

$$S'_p(t) = \frac{4 \sin 2pt}{\pi 2 \sin t}$$

soit :

$$S'_p(t) = \frac{2 \sin 2pt}{\pi \sin t}$$

4) Nous avons vu précédemment que $S_p(0) = 0$, donc S_p sera la primitive de S'_p nulle en zéro. En écrivant cela sous forme d'intégrale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \int_0^t S'_p(u) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2pu}{\sin u} du \end{aligned}$$

5) Pour déterminer les extrema de S_p , nous allons étudier ses variations via le signe de sa dérivée. Nous rappelons que les extremum correspondent à l'annulation de la dérivée. Le sens de variation nous permettra de déterminer si c'est un maximum ou un minimum.

Nous avons vu à la question 3, la valeur de la dérivée de S_p . Nous cherchons d'abord les valeurs de t où la dérivée est nulle, soit :

$$S'_p(t) = \frac{2 \sin 2pt}{\pi \sin t} = 0$$

Cela revient à chercher les valeurs de t qui annulent le numérateur sans être un zéro de même ordre du dénominateur.

$$\begin{aligned} \sin 2pt &= 0 \Rightarrow 2pt = 0 \text{ modulo } \pi \\ \Rightarrow t &= 0 \text{ modulo } \frac{\pi}{2p} \end{aligned}$$

Pour être sûr que nous avons bien trouver des zéros de la dérivée, nous devons examiner les zéros du numérateur, soit trouver l'ensemble des t tels que :

$$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ modulo } \pi$$

Nous constatons que la valeur $t = 0$ est un zéro du numérateur et du dénominateur, nous allons donc devoir prendre le développement limité des deux sinus. Le développement limité d'un sinus à l'ordre 1 est :

$$\sin v \approx v$$

Dans notre cas, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sin 2pt &\approx 2pt \\ \sin t &\approx t \end{aligned}$$

Donc :

$$S'_p(t) \approx \frac{2}{\pi} \frac{2pt}{t} = \frac{4p}{\pi}$$

Cette valeur n'est pas nulle, donc le point $t = 0$, n'est pas un zéro de S'_p . L'ensemble des zéros de la dérivée sont donc :

$$t = k \frac{\pi}{2p} \quad \text{avec } k \in [1, 2p - 1]$$

Lorsque t est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2p}$ (qui correspond au premier zéro), $\sin t$ et $\sin 2pt$ sont positifs, donc la dérivée est positive (rapport de grandeurs positives). Si nous prenons à présent t entre les deux premiers zéros (i.e. $\frac{\pi}{2p}$ et $\frac{\pi}{p}$), nous avons le sinus du dénominateur qui est toujours

positif (puisque t reste inférieur à π). Par contre, le numérateur devient négatif car l'argument du sinus est compris entre π et 2π

$$\frac{\pi}{2p} < t < \frac{\pi}{p} \Rightarrow \pi < 2pt < 2\pi$$

La dérivée est donc négative (rapport entre une grandeur négative et une grandeur positive).

En continuant le même raisonnement que précédemment, nous obtenons le tableau de variation de S_p :

t	0		$\frac{\pi}{2p}$		$2\frac{\pi}{2p}$		$3\frac{\pi}{2p}$		$\frac{(2p-1)\pi}{2p}$		π
$S'_p(t)$		+	0	-	0	+	0	-...+	0	-	
S_p	0	$\nearrow$	$m_{1,p}$	$\searrow$	$m_{2,p}$	$\nearrow$	$m_{3,p}$	$\searrow \dots \nearrow$	$m_{2p-1,p}$	$\searrow$	0

Le premier maximum local, noté $m_{1,p}$, est donc atteint pour $t = \frac{\pi}{2p}$. Pour obtenir la valeur de S_p en ce point, il suffit d'injecter cette valeur dans l'expression déterminée à la question 5, soit :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \frac{\sin 2pu}{\sin u} du \quad (17)$$

Effectuons le changement de variable afin d'enlever la variable p des bornes d'intégration :

$$u = \frac{v}{2p} \Rightarrow du = \frac{dv}{2p}$$

L'expression (17) s'écrit de la manière suivante :

$$m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\sin \frac{v}{2p}} \frac{dv}{2p} \quad (18)$$

Nous supposons (comme précisé dans l'énoncé) que nous avons le droit d'inverser les signes limite et intégrale, soit :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} m_{1,p} &= \frac{2}{\pi} \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\sin \frac{v}{2p}} \frac{dv}{2p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sin v}{\sin \frac{v}{2p}} \frac{dv}{2p} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p \sin \frac{v}{2p}} \right) \sin v dv \end{aligned}$$

En fait cette limite revient à prendre l'inverse de la limite de :

$$v \frac{\sin \frac{v}{2p}}{\frac{v}{2p}} = v \sin_c \frac{v}{2p}$$

Or quand $p \rightarrow \infty$, $\frac{v}{2p} \rightarrow 0$ et par définition du sinus cardinal ($\sin_c$), nous avons :

$$\sin_c \frac{v}{2p} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\sin v}{2p \sin \frac{v}{2p}} \rightarrow \frac{\sin v}{v}$$

Lorsque $p \rightarrow \infty$, l'expression du premier maximum local (18) tend donc vers :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m_{1,p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv \simeq 1,179$$

Etudions la borne sup de la fonction $|S_p - f|$ qui quantifiera, lorsque $p \rightarrow \infty$ l'écart maximum entre la fonction et son développement en série de Fourier. Par définition de cette borne, nous avons la relation :

$$\sup_{t \in]0, \pi[} |S_p(t) - f(t)| \geq |m_{1,p} - 1|$$

Quand $p \rightarrow \infty$, nous avons vu que la limite de $m_{1,p}$ était strictement supérieure à 1, donc

$$|m_{1,p} - 1| = m_{1,p} - 1 = 0,179 > 0$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{t \in]0, \pi[} |S_p(t) - f(t)| > 0$$

Nous obtenons donc un résultat qui dit que quel que soit le nombre de termes de la décomposition de Fourier de la fonction f , elle dépassera toujours f d'une valeur proche de 0.179 au voisinage de 0.

Sur les deux figures suivantes, nous représentons l'évolution de la décomposition en série de Fourier de la fonction f lorsque le nombre de sinus pris en compte augmente. La figure 1 représente la forme des sommes partielles pour un nombre de termes égal à 2, 5 et 10. Nous pouvons constater que le premier maximum se déplace vers 0 et que sa valeur décroît. Nous allons à présent augmenter le nombre de termes et faire un zoom autour de zéro.

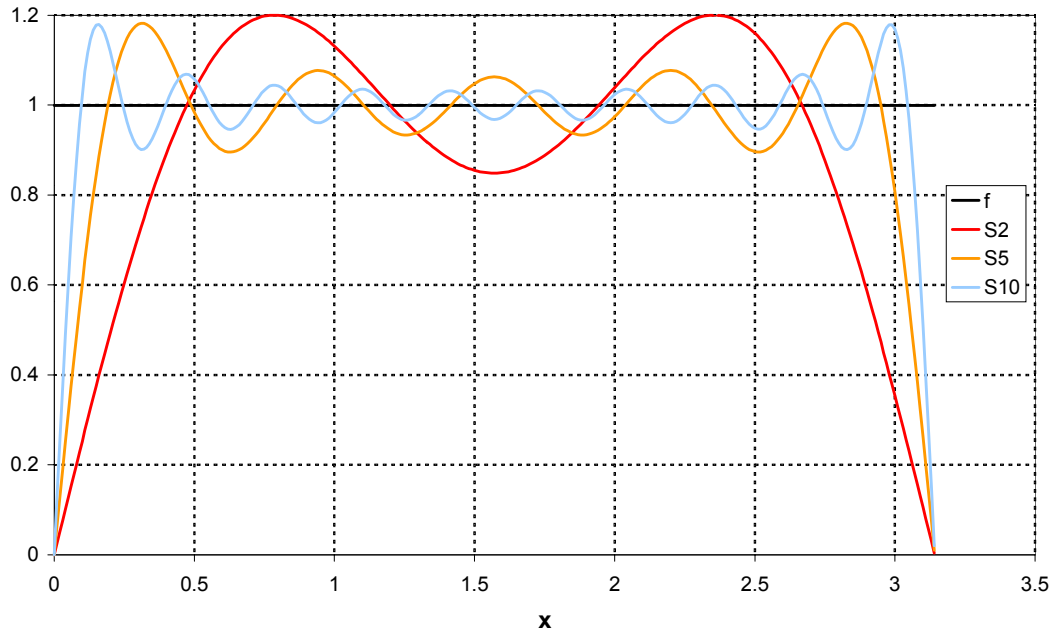


FIG. 1: Sommes partielles de la décomposition en série de Fourier de la fonction f pour trois valeurs du nombre de termes pris en compte.

Sur la figure 2, nous avons zoomé au voisinage de 0 et augmenté le nombre de termes pris en compte de façon importante (250, 1000, 5000). Les constatations sont identiques : le premier maximum tend vers zéro et sa valeur convergent vers une valeur proche mais inférieure à 1.2.

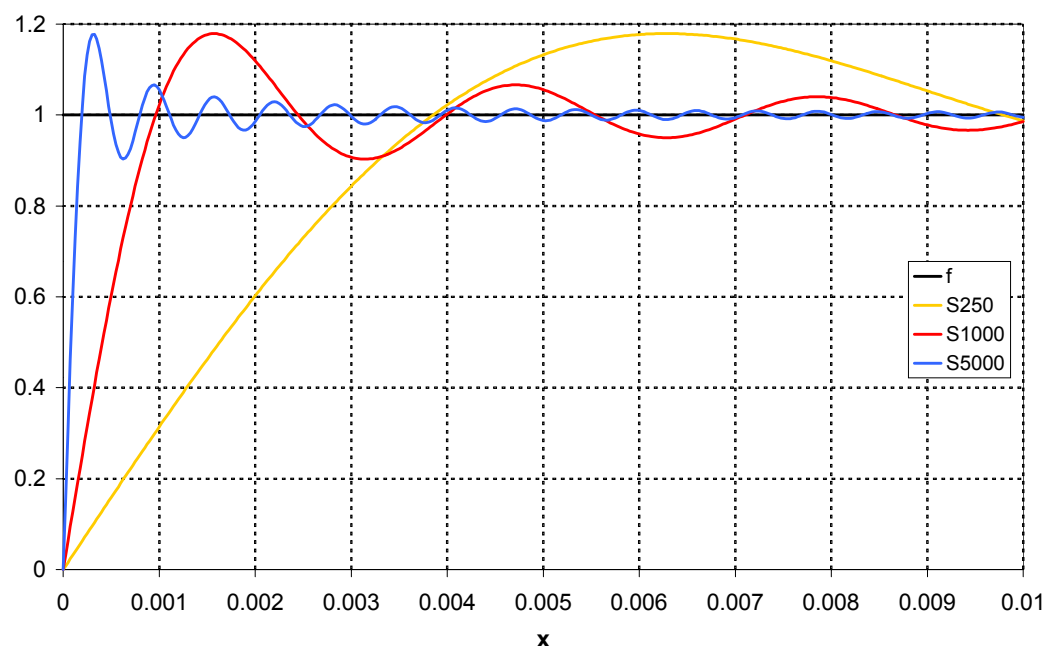


FIG. 2: Evolution du maximum lorsque le nombre de termes augmentent. Zoom au voisinage de zéro.

Exercice 2 : Séries de Fourier

Pour $A > 0$ fixé, on considère les fonctions 2π -périodiques suivantes

$$V_d(t) = |A \sin t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$V_s(t) = \begin{cases} A \sin t & \text{pour } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{pour } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

(On parle respectivement de signal redressé double alternance et signal redressé simple alternance).

1. Vérifier que

$$V_s(t) = \frac{1}{2} (V_d(t) + A \sin t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de $V_d(t)$. On rappelle que

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

3. $V_d(t)$ est-elle continue, dérivable, dérivable par morceaux, C^1 par morceaux. $V_d(t)$ est-elle somme de sa série de Fourier quelque soit $t \in \mathbb{R}$ et pourquoi? Donner l'expression de cette série de Fourier.
4. En déduire le développement en série de Fourier de $V_s(t)$.

5. Vérifier que ce développement permet de calculer la somme

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$$

Correction

1. Les deux fonctions qui entrent dans cette relation étant 2π -périodique, il suffit de vérifier l'égalité sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Pour $t \in [0, \pi]$ on a $V_d(t) = A \sin t$ et $V_s(t) = A \sin t = \frac{1}{2}(A \sin t + A \sin t)$. Pour $t \in [\pi, 2\pi]$ on a $V_d(t) = -A \sin t$ et $V_s(t) = 0 = \frac{1}{2}(-A \sin t + A \sin t)$.
2. La fonction $V_d(t)$ est une *fonction paire* donc les b_n sont nuls. On a tout d'abord

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V_d(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_d(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin t dt = \frac{2A}{\pi}$$

Pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} V_d(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A \sin t \cos(nt) dt \\ &= \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin(1+n)t + \sin(1-n)t}{2} \right] dt \\ &= \frac{A}{\pi} \left(\left[\frac{-\cos(1+n)t}{1+n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(1-n)t}{1-n} \right]_0^{\pi} \right) \quad \text{pour } n \neq 1 \end{aligned}$$

On fera un calcul à part pour $n = 1$. On a $\cos k\pi = (-1)^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $-(-1)^{1+n} = -(-1)^{1-n} = (-1)^n$. On en déduit

$$a_n = \frac{A}{\pi} \left(\frac{(-1)^n + 1}{1+n} + \frac{(-1)^n + 1}{1-n} \right) = \frac{2A [(-1)^n + 1]}{1-n^2} \quad \text{pour } n \neq 1$$

Pour n impair, ce terme est nul. Pour $n = 2p$ avec $p \geq 1$ on a $a_{2p} = \frac{4A}{1-4p^2}$. Pour $n = 1$ on a

$$a_1 = \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2t) dt = \frac{A}{\pi} \left[\frac{-\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi} = 0$$

Finalement, on a

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2A}{\pi} \\ a_1 = 0 \\ a_{2p+1} = 0 & p \in \mathbb{N}^* \\ a_{2p} = \frac{4A}{1-4p^2} & p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Remarque

On peut également remarquer que la fonction $V_d(t)$ est π -périodique et chercher son développement comme fonction π -périodique. Les coefficients sont alors donnés par

$$a'_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} V_d(t) \cos(2mt) dt = a_{2m}$$

3. Rappelons que c'est le Théorème de Dirichlet qui permet d'avoir les résultats de convergence *ponctuelle* des séries de Fourier. Ici la fonction $V_d(t)$ est bien continue pour tout $t \in \mathbb{R}$ car la fonction sin et la valeur absolue sont des fonctions continues. Par contre, $V_d(t)$ n'est pas dérivable aux points $k\pi$. On a une demi tangente à droite et à gauche mais qui sont différentes, ceci à cause de la valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0. Néanmoins $V_d(t)$ est dérivable par morceaux, puisque dérivable partout sauf aux points $k\pi$ avec en ces points des demi tangentes et aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux puisque la dérivée qui s'exprime avec un cos est continue par morceaux. Le plus simple pour se convaincre de tout cela est de faire un dessin. Ces propriétés assurent que $V_d(t)$ est somme de sa série de Fourier, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Attention, la continuité seule, ne suffit pas !

On peut écrire

$$V_d(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1-4p^2} \cos(2pt) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4. La fonction $\sin t$ est égale à son développement en séries de Fourier et donc

$$V_s(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{2A}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1-4p^2} \cos(2pt) + \frac{A \sin t}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

5. En faisant alors $t = 0$ on en déduit

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3. : Convergence dominée

Soit la fonction $f_n(x) = 1 - e^{-n \cos x}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) . Par le théorème de convergence dominée, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx.$$

Correction

Cherchons dans un premier temps la limite, quand n tend vers l'infini de la suite de fonction (f_n) . Nous avons :

$$\begin{aligned} \text{si } x = \frac{\pi}{2} \quad \cos x = 0 \quad & \text{ce qui donne } f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \\ \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \cos x > 0 \quad & \text{donc } f_n(x) \longrightarrow 1 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Les fonctions f_n sont continues, quelque soit n , et convergent lorsque n tend l'infini vers une limite qui est discontinue : la suite (f_n) converge donc simplement, mais pas uniformément.

Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, nous devons trouver une majoration des fonction $|f_n|$ par une fonction intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \cos x \leq 1 \quad & \Rightarrow \quad -n \leq -n \cos x \leq 0 \\ & \Rightarrow \quad 0 \leq e^{-n \cos x} \leq 1 \\ & \Rightarrow \quad 0 \leq f_n(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Les fonctions f_n sont donc positives et majorées, $\forall n \in \mathbb{N}$, par l'indicatrice du segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui est intégrable sur ce segment.

L'application du théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4. : Convergence dominée

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx$$

Correction

De manière identique à l'exercice précédent, nous allons d'abord chercher la limite de la suite de fonctions.

Soit $x \neq k\pi$, quand $n \rightarrow +\infty$ $e^{-n \sin^2 x} \rightarrow 0$.

Mais si $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $e^{-n \sin^2 x} \rightarrow 1$.

Donc, nous avons $e^{-n \sin^2 x} \rightarrow 0$ p.p. car l'ensemble $D = \{x = k\pi / k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable donc négligeable.

La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, f est donc finie presque partout sur $\mathbb{R}^+$ et donc :

$$e^{-n \sin^2 x} f(x) \rightarrow 0 \text{ p.p. quand } n \rightarrow \infty$$

De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad & 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ \Rightarrow & -n \leq -n \sin^2 x \leq 0 \\ \Rightarrow & 0 \leq e^{-n} \leq e^{-n \sin^2 x} \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 \leq \left| e^{-n \sin^2 x} f(x) \right| \leq |f(x)| \end{aligned}$$

or $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée et nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \sin^2 x} f(x) dx = 0$$

Exercice 5. : Transformée de Fourier

Montrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 4\pi^2 t^2 x(t) = \lambda x(t) \quad (19)$$

alors sa Transformée de Fourier (en supposant qu'elle existe et qu'elle possède les "bonnes propriétés") vérifie la même équation différentielle.

Correction

Puisque la transformée de Fourier de f possède les "bonnes propriétés", nous pouvons utiliser les relations entre transformée de Fourier et dérivation :

$$\widehat{t^k f}(\xi) = \frac{1}{(-2i\pi)^k} \widehat{f^{(k)}}(\xi) \quad (20)$$

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \widehat{f}(\xi) \quad (21)$$

Prenons la TF de (19), nous obtenons (en utilisant (20) et (21)) :

$$\begin{aligned} (2i\pi\xi)^2 \widehat{f}(\xi) - 4\pi^2 \frac{1}{(-2i\pi)^2} \widehat{f^{(2)}}(\xi) &= \lambda \widehat{f}(\xi) \\ \implies -4\pi^2 \xi^2 \widehat{f}(\xi) + \widehat{f^{(2)}}(\xi) &= \lambda \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{d^2 \widehat{f}(\xi)}{d\xi^2} - 4\pi^2 \xi^2 \widehat{f}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\xi)$$

Exercice 6 : Transformée de Fourier et Convolution

Soit $a > 0$ un paramètre fixé. On pose

$$h_a(x) = e^{-\pi a|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier que

$$\widehat{h_a}(\lambda) = \frac{2a}{\pi} \frac{1}{a^2 + 4\lambda^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h_a}(\lambda) d\lambda = 1$$

On rappelle qu'une primitive de $\frac{1}{a^2 + \lambda^2}$ est $\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{\lambda}{a}\right)$.

3. Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. On veut montrer que

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a|t|} \widehat{f}(t) e^{2i\pi xt} dt$$

On indique dans ce qui suit la marche à suivre. Partir de l'expression

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \lambda) \widehat{h_a}(\lambda) d\lambda$$

- (a) Remplacer $\widehat{h_a}(\lambda)$ par son expression intégrale.
- (b) En admettant que c'est possible (Théorème de Fubini) faire l'interversion des ordres d'intégration.

(c) Effectuer le changement de variable $u = x - \lambda$ et montrer que l'on obtient

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-2i\pi xt} \widehat{f(-t)} dt$$

(d) Conclure en utilisant la parité de h_a .

4. En supposant que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, montrer en appliquant la convergence dominée que

$$\lim_{a \rightarrow 0} f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{2i\pi xt} dt$$

5. En déduire, toujours sous l'hypothèse $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, que l'on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} f * \widehat{h_a}(x) = f(x) \quad p.p.$$

Correction

1. On a par définition

$$\widehat{h_a}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a|x|} e^{-2i\pi x\lambda} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\pi ax} e^{-2i\pi x\lambda} dx + \int_{-\infty}^0 e^{\pi ax} e^{-2i\pi x\lambda} dx$$

(Quand on a une valeur absolue dans une intégrale, on est généralement obligé de se débarrasser de celle-ci en décomposant l'intégrale en deux).

$$\begin{aligned} \widehat{h_a}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-x(\pi a + 2i\pi\lambda)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(\pi a - 2i\pi\lambda)} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-x(\pi a + 2i\pi\lambda)}}{\pi a + 2i\pi\lambda} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{x(\pi a - 2i\pi\lambda)}}{\pi a - 2i\pi\lambda} \right]_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

On a $|e^{-x(a+2i\pi\lambda)}| = e^{-xa}$ (car $|e^{-2i\pi x\lambda}| = 1$) qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et de même $|e^{x(a-2i\pi\lambda)}| = e^{xa}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. On a donc

$$\widehat{h_a}(\lambda) = \frac{1}{\pi a + 2i\pi\lambda} + \frac{1}{\pi a - 2i\pi\lambda} = \frac{2\pi a}{\pi^2 a^2 + 4\pi^2 \lambda^2} = \frac{2a}{\pi} \frac{1}{a^2 + 4\lambda^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h_a}(\lambda) d\lambda = \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\pi} \left[\arctan \frac{\lambda}{a} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1$$

(a) On écrit

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-2i\pi t\lambda} dt \right] d\lambda$$

- (b) Indiquons pourquoi l'interversion des intégrales est possible. Le théorème de Fubini (Th 2.39) nous indique qu'il faut, pour une fonction à valeurs complexes ou qui n'a pas un signe constant, tout d'abord étudier l'intégrabilité de *son module*. La fonction de deux variables est la fonction à étudier est la fonction : $(\lambda, t) \longrightarrow f(x - \lambda) h_a(t) e^{-2i\pi t \lambda}$ (x est fixé et ne rentre pas dans l'intégration). En module on a $|f(x - \lambda) h_a(t) e^{-2i\pi t \lambda}| = |f(x - \lambda) h_a(t)|$. On a alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x - \lambda)| |h_a(t)| d\lambda dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x - \lambda)| d\lambda \int_{\mathbb{R}} |h_a(t)| dt < \infty$$

car les deux fonctions sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Ceci permet de faire l'interversion des intégrales.

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \lambda) e^{-2i\pi t \lambda} d\lambda \right] dt$$

- (c) En remplaçant la variable d'intégration λ par la variable $u = x - \lambda$ (rappelons qu'ici x est fixé),

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) \left[\int_{+\infty}^{-\infty} f(u) e^{-2i\pi t(x-u)} (-du) \right] dt$$

Les bornes inversées et le terme $(-du)$ permettent de remettre l'intégrale sous la forme

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-2i\pi t x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{+2i\pi t u} du \right] dt$$

A cause du signe $+$ dans l'exponentielle, le terme entre crochets vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{+2i\pi t u} du = \widehat{f(-t)}$$

On a donc bien

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-2i\pi x t} \widehat{f(-t)} dt$$

- (d) La fonction h_a étant clairement une fonction *paire*, le changement de variables $t \curvearrowright -t$ donne, avec comme précédemment changement des bornes remises dans le bon ordre par le terme $-dt$

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(-t) e^{+2i\pi x t} \widehat{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{+2i\pi x t} \widehat{f(t)} dt$$

ou encore

$$f * \widehat{h_a}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a|t|} e^{+2i\pi x t} \widehat{f(t)} dt$$

3. Pour calculer cette limite, on veut faire rentrer la limite dans l'intégrale, donc utiliser le théorème de convergence dominée. Quand a tend vers 0 on a

$$\lim_{a \rightarrow 0} e^{-\pi a|t|} e^{+2i\pi x t} \widehat{f}(t) = e^{+2i\pi x t} \widehat{f}(t) \quad \forall x, \forall t \in \mathbb{R}$$

La majoration indépendante de a est

$$\left| e^{-\pi a|t|} e^{+2i\pi x t} \widehat{f}(t) \right| \leq \left| \widehat{f}(t) \right| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

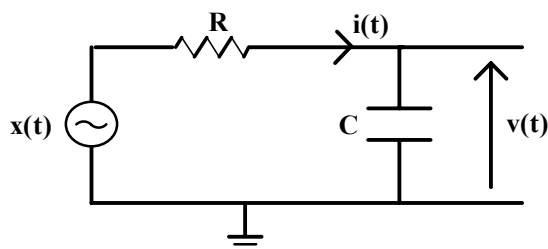
et par hypothèse cette fonction est intégrable. La convergence dominée s'applique et donc

$$\lim_{a \rightarrow 0} f * \widehat{h}_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{2i\pi x t} dt$$

4. Comme $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on peut utiliser le théorème d'inversion de la Transformée de Fourier (Théorème 3.8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{2i\pi x t} dt = f(x) \quad p.p.$$

Exercice 7 : Etude la cellule RC



On considère le système constitué d'un générateur basse fréquence fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C . Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. On rappelle que la charge $q(t)$ du condensateur vaut $C v(t)$ et que l'intensité dans le circuit est donné par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. D'autre part, les tensions vérifient l'égalité :

$$x(t) = v(t) + R i(t)$$

- 1- Donner l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
- 2- En supposant que $x(t)$ est tel que $e^{\frac{t}{RC}} x(t)$ est intégrable sur $] -\infty, t]$, exprimer $v(t)$.
- 3- En posant

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} U(t)$$

où $U(t) = I_{[0,+\infty[}(t)$, **exprimer $v(t)$ comme un produit de convolution entre h et x .**

Correction

1- Nous partons de la relation liant les tensions :

$$x(t) = v(t) + R i(t) \quad (22)$$

et nous remplaçons i par son expression en fonction de v . Pour cela, nous nous intéressons au condensateur. Le courant est lié à la dérivée de la charge qui est exprimée linéairement en fonction de la tension, soit :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = \frac{dCv}{dt}(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$$

L'équation (22) devient donc :

$$x(t) = v(t) + RC \frac{dv}{dt}(t)$$

Soit :

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}x(t) \quad (23)$$

2- Résolvons cette équation différentielle. La méthode consiste, d'abord, à chercher la solution de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre), soit :

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = 0 \quad (24)$$

La solution est de la forme :

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour obtenir l'ensemble des solutions de l'équation (24), nous considérons ensuite que la constante A dépend de la variable t (cette méthode s'appelle "variation de la constante"). Prenons donc :

$$v(t) = A(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

et injectons cette expression dans (23) :

$$\begin{aligned} A'(t) e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{A(t)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC} A(t) e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{RC} x(t) \\ A'(t) e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{RC} x(t) \\ A'(t) &= \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} x(t) \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent calculer la valeur de A en intégrant le terme de droite, nous avons donc :

$$A(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{u}{RC}} x(u) du + B$$

Nous savons par hypothèses que $e^{\frac{t}{RC}} x(t)$ est intégrable sur $]-\infty, t]$, donc l'intégrale précédente existe. Nous devons déterminer la valeur de B . Considérons $t < 0 \Rightarrow x = 0$ et $v = 0$ car le

système est causal. Donc : $A(t) = B$ et $v(t) = A(t) e^{-\frac{t}{RC}} = B e^{-\frac{t}{RC}} = 0$. Finalement nous obtenons :

$$B = 0 \Rightarrow A(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{u}{RC}} x(u) du$$

soit :

$$v(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{u}{RC}} x(u) du$$

3- Il est possible de faire passer l'exponentielle sur t sous le signe intégrale puisqu'elle ne dépend pas de la variable d'intégration (u). Soit :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{u}{RC}} x(u) du \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-u}{RC}} x(u) du \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable :

$$y = t - u \Leftrightarrow dy = -du$$

Les bornes d'intégrations deviennent : quand u vaut t , y vaut 0 et quand u tend vers $-\infty$, y tend vers $+\infty$. L'expression de v devient donc :

$$\begin{aligned} v &= - \int_{+\infty}^0 \frac{1}{RC} e^{-\frac{y}{RC}} x(t-u) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} x(t-u) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} U(t) x(t-u) dy \end{aligned}$$

Nous reconnaissons l'expression du produit de convolution entre la fonction x (l'excitation du système) et h (la réponse impulsionnelle du système). Donc :

$$v = h * x$$

Autres méthode de calcul : nous aurions pu calculer la réponse de la cellule RC en utilisant la transformée de Fourier. Revenons à l'équation différentielle que doit vérifier la tension et prenons la TF. En utilisant la formule de TF de la dérivée :

$$TF(v^{(k)}) (\lambda) = (2i\pi\lambda)^k TF(v) (\lambda)$$

nous obtenons :

$$2i\pi\lambda V(\lambda) + \frac{1}{RC} V(\lambda) = \frac{1}{RC} X(\lambda)$$

où V , resp. X , représente la transformée de Fourier de v , resp. x .

$$\begin{aligned} V(\lambda) \left(2i\pi\lambda + \frac{1}{RC} \right) &= \frac{1}{RC} X(\lambda) \\ V(\lambda) (1 + 2i\pi RC\lambda) &= X(\lambda) \\ V(\lambda) &= \frac{1}{1 + 2i\pi RC\lambda} X(\lambda) \end{aligned}$$

En regardant dans la table des transformées de Fourier, nous constatons que la fonction $\frac{1}{1+2i\pi RC\lambda}$ est la transformée de Fourier de $e^{-\frac{t}{RC}}U(t)$. $V(\lambda)$ s'écrit donc comme le produit de deux transformées de Fourier :

$$V(\lambda) = TF\left(\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}U(t)\right) \cdot TF(x(t)) = TF(h(t)) \cdot TF(x(t))$$

Comme les deux fonctions de la variable t appartiennent à $\mathcal{L}^1$, nous pouvons appliquer la relation liant TF et Convolution :

$$V = TF(h \star x)$$

Prenons la transformée de Fourier inverse, nous obtenons :

$$v(t) = (h \star x)(t) \quad \text{p.p.t. } x$$