Examen de Mathématiques/ Transformée de Fourier
PAD

Durée 2 heures. Samedi 20 Mars 2010

Documents autorisés: Feuille manuscrite 21x29.7

Exercice 1. Séries de Fourier (10 points).

On considère la fonction 2π-périodique f définie sur $]0, 2\pi[$ par

$$f(t) = t^2$$

1. Tracer la courbe de f sur l'intervalle$]-3\pi, 3\pi[$.

2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle paire ou impaire ?

3. Montrer que, pour $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{4}{n^2}$$

4. Montrer que
$$a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$$

   On admettra dans la suite que, $\forall n \geq 1$
$$b_n = \frac{-4\pi}{n}$$

5. Quel est le dévelopement en série de Fourier de f dans l'intervalle $t \in]0, 2\pi[$?

6. Quelle est la valeur de la somme de la série de Fourier en $t = 0$?

7. Montrer que l'on peut déduire des questions précédentes la valeur de la somme de la série :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8. Rappeller la formule de Parseval-Plancherel.

9. Calculer d'une part :
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 \, dt$$

10. En calculant le second membre de la formule de Parseval- Plancherel, montrer que l'on peut en déduire la formule intéressante suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

Exercice 2. Convergence Dominée (6 points).

On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$ et n entier supérieur ou égal à 1, puis

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \quad n \geq 1$$

1. Montrer que la fonction $f_1(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ *i.e.* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ existe, en vérifiant successivement que f est :

2. intégrable au voisinage de 0

3. intégrable au voisinage de $+\infty$

4. Montrer que

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x > 0$$

5. En déduire que $f_n(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$

6. Montrer aussi grâce à la question 4) que :

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0$$

Exercice 3. Transformée de Fourier (2 points).

On sait que la TF de la fonction $f(x) = e^{-ax} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ (avec $a > 0$) est la fonction

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{a + 2i\pi\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche la fonction g telle que

$$\widehat{g}(\lambda) = \frac{1}{1 + i\lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Dans la liste suivante, quelle est la réponse correcte (on justifiera la réponse par un calcul) **?**

$g(t) = \pi e^{-2\pi t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$
$g(t) = 2\pi e^{-2\pi t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$
$g(t) = e^{-2\pi t} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$
$g(t) = e^{-2\pi |t|}$

On veut maintenant, en déduire, grâce à la formule de Parseval Plancherel, la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a + 2i\pi\lambda} \right|^2 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2\lambda^2} \, d\lambda = ?$$

Dans la liste suivante, quelle est la réponse correcte (on justifiera la réponse par un calcul) ?

$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+4\pi^2\lambda^2} \, d\lambda = 1$
$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+4\pi^2\lambda^2} \, d\lambda = a$
$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+4\pi^2\lambda^2} \, d\lambda = 1/a$
$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+4\pi^2\lambda^2} \, d\lambda = 1/2a$

Exercice 4. Produit de convolution et Transformée de Fourier (2 points).

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et on se propose de calculer $f * f$.

1. En utilisant la table des TFs, montrer que

$$\widehat{f}(\lambda) = e^{-2\pi^2\lambda^2} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\mathbf{1})$$

2. En déduire que

$$\widehat{f * f}(\lambda) = e^{-4\pi^2\lambda^2} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\mathbf{1})$$

3. En utilisant de nouveau le tableau des TFs, en déduire que

$$f * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tableau de Transformées de Fourier.

Fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ($a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$).

$$\Pi_a(x) = \mathbb{I}_{[-a/2,a/2]}(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\sin \pi a\lambda}{\pi\lambda}$$

$$T_a(x) = \left(1 - 2\frac{|x|}{a}\right)\Pi_a(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2\sin^2(\pi a\lambda/2)}{\pi^2 a\lambda^2}$$

$$e^{-ax}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{(a+2i\pi\lambda)}$$

$$\frac{x^k}{k!}e^{-ax}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{(a+2i\pi\lambda)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$e^{-a|x|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2\lambda^2}$$

$$e^{-ax^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\lambda^2/a}$$

Formules réciproques pour $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \pi\mathbb{I}_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(\lambda)$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\lambda|}$$

$$\frac{1}{(a+2i\pi x)} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-a\lambda}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \pi\, T_{\frac{2}{\pi}}(\lambda)$$