Contrôle de Mathématiques.
APAD Module : Transformée de Fourier

Durée 2 Heures. Seuls documents autorisés: feuille 21x27 avec notes

QCM. Attention, plusieurs réponses peuvent être vraies. Toute réponse doit être justifiée soit par une explication, un calcul, un résultat du cours.

QCM1 La fonction

$$\frac{\sin x}{x}$$

vérifie:

1. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
2. $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
3. $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
4. $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

QCM2 La fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(nt)\, e^{-t^2}\, dt$$

1. n'a rien à voir avec une tranformée de Fourier
2. s'exprime à l'aide de la transformée deFourier de la fonction e^{-t^2}
3. vaut $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$

Exercice 1. Série de Fourier.

On considère la fonction $\pi-$**périodique et paire** $f(x)$ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = |\cos x| \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Dessiner f entre -2π et 2π.
2. La fonction f est-elle continue? dérivable? $\mathcal{C}^1$ par morceaux?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f. Ecrire la série de Fourier $S_f(x)$ de f.
4. La série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ pour tout x et pourquoi?

5. En déduire que

$$2-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^2-1}=\pi$$

Exercice 2. Convergence Dominée

On veut déterminer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\,dx=?$$

1. Déterminer la limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

2. Déterminer la limite de $x^{-\frac{1}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

3. En utilisant une majoration de $(1+u)$ souvent utilisée, majorer $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ par une fonction indépendante de n.

4. Montrer que l'on a

$$\begin{array}{cc}\left|x^{-\frac{1}{n}}\right|\leq 1 & \text{pour } x>1\\ \left|x^{-\frac{1}{n}}\right|\leq x^{-\frac{1}{2}} & \text{pour } 0<x\leq 1 \text{ et } n\geq 2\end{array}$$

5. En déduire

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}x^{-\frac{1}{n}}\,dx=?$$

Exercice 3. Dérivabilité.

On considère la fonction

$$F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy\quad\text{pour } x>0$$

1. Montrer que F est dérivale sur $]0,+\infty[$.

2. Généraliser ce qui précède, en montrant que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ à l'ordre n pour tout entier n.