Correction du contrôle de Mathématiques GEA

14 Janvier 2010

..

Question 1

Soit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{pour } x > 1 \text{ et } y > 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut montrer (*on ne demande pas le calcul*) que

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = \frac{1}{2}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = -\frac{1}{2}$$

On en déduit alors que l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{|x-y|}{(x+y)^3} dx dy$$

vaut :

1. $+\frac{1}{2}$
2. 0
3. $\frac{1}{4}$
4. ∞ **Réponse correcte :** En effet, si on avait $\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{|x-y|}{(x+y)^3} dx dy < \infty$, le Théorème de Fubini permettrait de conclure à l'égalité des 2 intégrales itérées. Exemple de *raisonnement par l'absurde* : si on avait telle propriété $\mathcal{P}$ on en déduirait la propriété $\mathcal{Q}$ qui n'est manifestement pas vérifiée, c'est donc "non $\mathcal{P}$ " qui est vraie!

Question 2 Si la fonction f est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f}$ est sa TF, on a nécessairement

1. $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Non, pensez à la *fonction porte* qui a un sinus cardinal comme TF.

2. $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$. **Oui, Réponse correcte**, voir le cours.

3. $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. **Non**. Pour avoir la dérivabilité assurée, il faut ajouter la condition : $xf(x)$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

4. $\widehat{f}$ est à valeurs réelles. **Non.** La fonction $f(x) = e^{-ax}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ a comme TF la fonction $\frac{1}{a+2i\pi\lambda}$ qui est à valeurs complexes.

Question 3 Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors :

1. f est nécessairement **bornée sur $\mathbb{R}$** . **Non.** Pensez à $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0, 1]$.
2. f est nécessairement **continue sur $\mathbb{R}$** . **Non.** On peut intégrer des fonctions très discontinues, notamment grâce à la notion d'ensemble négligeable.
3. $f(x)$ tend nécessairement vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. **Non.** Pensez à la fonction définies par des triangles, de hauteur tendant vers l'infini, mais de base tendant vers 0 de sorte que les surfaces soient en $\frac{1}{n^2}$ de somme finie (détail en TD).
4. Si $f(x)$ a une limite quand x tend vers $\pm\infty$, alors cette limite est nécessairement nulle. **Oui, Réponse correcte.** Résultat immédiat (**Voir Td**).

Question 4

La fonction

$$h(t) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(t^2+1)}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

1. appartient à $\mathcal{L}^1([0, \infty[)$. **Oui, Réponse correcte.** Comme $\sin t$ équivaut à t quand t tend vers 0 et $\frac{1}{t^2+1}$ tend vers 1, $h(t)$ équivaut à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est une fonction intégrable au voisinage de 0. En $+\infty$, on a $|h(t)| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(t^2+1)}$ qui est équivalente à $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}t^2}$ quand t tend vers l'infini, cette dernière fonction est intégrable en $+\infty$ ($\frac{1}{t^\beta}$ avec $\beta > 1$).
2. appartient à $\mathcal{L}^2([0, \infty[)$. **Non.** Ici $h(t)^2$ sera équivalente à $\frac{1}{t}$ au voisinage de $t = 0$, fonction qui n'est pas intégrable en 0.
3. appartient à $\mathcal{L}^1([0, \infty[) \cap \mathcal{L}^2([0, \infty[)$. **Non.** Conséquence de 2.
4. n'appartient ni à $\mathcal{L}^1([0, \infty[)$, ni à $\mathcal{L}^2([0, \infty[)$. **Non.** Conséquence de 1.

Question 5

La distribution $T = \delta + \delta'$ opère sur les fonctions tests φ par:

1. $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) + \varphi'(0)$
2. $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0) - \varphi'(0)$. **Réponse correcte :** par définition $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ et $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$
3. $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi'(x)) dx$

$$4. \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx - \varphi'(0)$$

Question 6

On considère la fonction : $f(x) = \frac{1}{\sin(1/x)}$ et E l'ensemble des points où la fonction f n'est pas définie *i.e.* $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \sin(1/x) = 0\}$. Cet ensemble E est négligeable.

1. Vrai. **Réponse correcte :** $\sin(1/x) = 0$ ssi $x = \frac{1}{k\pi}$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) et cet ensemble indexé par des entiers est *dénombrable* donc **négligeable**.

2. Faux

Question 7

On rappelle que si g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et T une distribution quelconque, on définit la nouvelle distribution gT en posant

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et que l'on a la formule de dérivation

$$(gT)' = g'T + gT'$$

Soit T la distribution :

$$T = \cos x [\text{sign}(x)]$$

Alors on a :

1. $T'' + T = 0$

2. $T'' + T = 2\delta'$ **Réponse correcte :** on a successivement

$$T' = -\sin x [\text{sign}(x)] + \cos x (2\delta)$$

avec $\cos x (2\delta) = 2\delta$ puisque $\langle \cos x (2\delta), \varphi \rangle = \langle 2\delta, \cos x \varphi(x) \rangle = 2 \cos 0 \varphi(0) = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi \rangle$. On peut démontrer, plus généralement, que

$$g(x) \delta = g(0) \delta$$

par un raisonnement tout à fait analogue. Donc

$$T' = -\sin x [\text{sign}(x)] + 2\delta$$

Ensuite

$$T'' = -\cos x [\text{sign}(x)] - \sin x (2\delta) + 2\delta'$$

avec $\sin x (2\delta) = 0$ puisque $\sin 0 = 0$. La somme $T'' + T$ vaut $2\delta'$.

3. $T'' + T = \delta$

4. $T'' + T = 2\delta$

Exercice 1 (2 points)

Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$. Déterminer, en justifiant avec soin :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}} dx$$

Correction. Remarquons tout d'abord que la fonction $\sin \frac{\pi}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$ ce qui n'est pas gênant pour l'intégrale, un point étant négligeable. Pour passer à la limite dans l'intégrale, on utilise le Théorème de Convergence Dominée.

1. On a, pour $\sin \frac{\pi}{x} \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}} = 1$ et donc $f_n(x) = f(x) \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $f(x)$. Si $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, alors $f_n(x) = 0$ et la limite est nulle. Ceci se produit pour x dans le sous ensemble de $[0, 1]$ constitué des points $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et cet ensemble est dénombrable donc négligeable. Finalement, on peut écrire que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p. quand } n \rightarrow \infty$$

Remarque. Beaucoup ont eu tendance à "oublier" ces points!... ce qui est inexact, mais sans gravité pour le résultat final, grâce à la notion d'**ensemble négligeable**.

2. Comme $|\sin \frac{\pi}{x}| \leq 1$ on a aussi $|\sin \frac{\pi}{x}|^{\frac{1}{n}} \leq 1$ et donc

$$|f(x)| \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}} \leq |f(x)| \quad \forall x \in]0, 1]$$

avec $f(x)$ intégrable. Les conditions du Théorème de Convergence Dominée sont remplies, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Remarque : La majoration doit porter sur $|f_n(x)|$ et non seulement sur $f_n(x)$. Ou encore, une majoration du type

$$f(x) \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{\frac{1}{n}} \leq f(x) \quad \forall x \in]0, 1]$$

bien qu'exacte, est insuffisante pour conclure sur l'interversion des intégrales!

Exercice 2 (3 points)

On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$$

et l'intégrale double

$$I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

1. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy = \frac{\pi^2}{2}$$

On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2y} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} [\text{Arctan}(\sqrt{y}x)]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2} \text{ pour } y > 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+u^2)} du = 2 [\text{Arctan } u]_0^\infty = \pi$$

en posant $u = \sqrt{y}$. D'où le résultat.

2. En déduire, **en justifiant**, la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$$

Comme $f(x, y) \geq 0$ sur le domaine d'intégration, on sait que l'on peut intégrer dans n'importe quel ordre (Théorème de Fubini pour les fonctions positives). Si on intègre maintenant en y :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy &= \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left[\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y} \right] dy \\ &= \frac{1}{x^2-1} [\ln(1+x^2y) - \ln(1+y)]_0^\infty \\ &= \frac{1}{x^2-1} \left[\ln \frac{1+x^2y}{1+y} \right]_0^\infty = \frac{1}{x^2-1} \ln x^2 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$I = 2J$$

ou encore

$$J = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 3 (4 points)

1. **Question préliminaire.** Montrer que si f et g sont des fonctions **païres**, et que le produit de convolution existe $f * g(x)$ existe pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors $f * g(x)$ est une fonction **paire**.

On a

$$f * g(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t) dt \text{ grâce à la parité de } f$$

On fait le changement de variable $u = -t$ qui change les bornes, mais qui donne $du = -dt$ ce qui compense.

$$f * g(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(-u) du$$

et par parité de g

$$f * g(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u) du = f * g(x)$$

ainsi $f * g(x)$ est une fonction **paire**.

2. Pour $a > 0$ et $b > 0$, on considère les fonctions $g_a(x) = e^{-a|x|}$ et $g_b(x) = e^{-b|x|}$. Montrer que pour $x \geq 0$, on a

$$g_a * g_b(x) = \frac{2(ae^{-bx} - be^{-ax})}{a^2 - b^2}$$

et en déduire l'expression de $g_a * g_b(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

On fait tout d'abord le calcul pour $x \geq 0$.

$$g_a * g_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|}e^{-b|t|} dt$$

Pour ce type de calcul, on doit d'une façon ou d'une autre enlever les valeurs absolues. Remarquons que la fonction à intégrer $:t \rightarrow e^{-a|x-t|}e^{-b|t|}$ n'est pas une fonction paire (sauf pour le cas particulier $x = 0$), donc on ne peut pas utiliser un argument de parité. La seule solution est de découper l'intervalle d'intégration, pour préciser sur chaque intervalle l'expression des valeurs absolues. Les valeurs $t = 0$ et $t = x$ (dans la calcul x est **fixé positif**) interviennent.

$$\begin{aligned} g_a * g_b(x) &= \int_{-\infty}^0 e^{-a(x-t)}e^{bt} dt + \int_0^x e^{-a(x-t)}e^{-bt} dt + \int_x^{+\infty} e^{a(x-t)}e^{-bt} dt \\ &= e^{-ax} \int_{-\infty}^0 e^{(a+b)t} dt + e^{-ax} \int_0^x e^{(a-b)t} dt + e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+b)t} dt \\ &= e^{-ax} \frac{1}{a+b} + e^{-ax} \frac{e^{(a-b)x} - 1}{a-b} + e^{ax} \frac{e^{-(a+b)x}}{a+b} \\ &= \frac{e^{-ax}(a-b) + (e^{-bx} - e^{-ax})(a+b) + e^{-bx}(a-b)}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{e^{-ax}(-2b) + e^{-bx}(2a)}{a^2 - b^2} = \frac{2(ae^{-bx} - be^{-ax})}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Par parité, on a pour $x \leq 0$

$$g_a * g_b(x) = g_a * g_b(-x) = \frac{2(ae^{bx} - be^{ax})}{a^2 - b^2}$$

ce que l'on peut résumer par la formule générale :

$$g_a * g_b(x) = \frac{2(ae^{-b|x|} - be^{-a|x|})}{a^2 - b^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 (2 points)

On considère les 3 fonctions

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2} \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

et on donne $\widehat{f}(\lambda) = \pi e^{-2\pi|\lambda|}$.

1. Vérifiez que $g(x) = f(x-a)$ avec a convenablement choisi et en déduire *simplement* $\widehat{g}(\lambda)$.

On a immédiatement : $g(x) = f(x-1)$. On utilise alors la formule de *translation* :

$$\widehat{g}(\lambda) = e^{-2i\pi\lambda} \widehat{f}(\lambda) = \pi e^{-2i\pi\lambda} e^{-2\pi|\lambda|}$$

2. En utilisant maintenant une propriété de dérivation, en déduire *simplement* $\widehat{h}(\lambda)$.

On a $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et donc $h(x) = -\frac{1}{2}f'(x)$. Comme $f'(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (pas de problème en $x=0$ et équivalence en $2/|x|^3$ au voisinage de l'infini) on peut utiliser la formule donnant la TF d'une dérivée, soit

$$\widehat{f}'(\lambda) = (2i\pi\lambda) \widehat{f}(\lambda)$$

d'où

$$\widehat{h}(\lambda) = -i\pi\lambda \widehat{f}(\lambda)$$

Exercice 5 (2 points)

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on pose : $f_a(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)}$ et $f_b(x) = \frac{1}{(x^2+b^2)}$.

1. La fonction f_a est-elle dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?

Pour $f_a(x)$ il n'y a pas de problème d'intégrabilité en $x=0$ puisque le dénominateur ne s'annule pas. Au voisinage de $\pm\infty$ la fonction est équivalente à $\frac{1}{x^2}$ dont on sait qu'elle est intégrable en $\pm\infty$. Même argument pour $[f_a(x)]^2$ qui se comporte comme $\frac{1}{x^4}$ à l'infini.

2. Quelle est la TF de f_a considérée comme fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{F}(f_a)(\lambda)$?

Comme f_a est à la fois dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on sait que les 2 TF coïncident et donc, grâce à la table :

$$\mathcal{F}(f_a)(\lambda) = \widehat{f}_a(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\lambda|}$$

3. En appliquant la relation de Parseval-Plancherel, calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = ?$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} f_a(x) f_b(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f_a)(\lambda) \mathcal{F}(f_b)(\lambda) d\lambda = \frac{\pi^2}{ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi(a+b)|\lambda|} d\lambda$$

La fonction à intégrer est **paire**, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx &= \frac{2\pi^2}{ab} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi(a+b)\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{ab(a+b)} \left[-e^{-2\pi(a+b)\lambda} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{ab(a+b)} \end{aligned}$$