Examen de Mathématiques/ Transformée de Fourier PAD

Durée 2 heures. Samedi 22 Mars 08

Documents autorisés: Feuille manuscrite 21x29.7

Dans cette partie QCM **une seule réponse est juste**. On demande uniquement d'indiquer quelle est la réponse juste **sans aucune justification**.

Le symbole $\mathbb{I}_E$ désigne la *fonction indicatrice* de l' ensemble E qui est définie par :

$$\begin{cases} \mathbb{I}_E(x) = 1 & \text{si } x \in E \\ \mathbb{I}_E(x) = 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

et on notera TF pour Transformée de Fourier.

Question 1 (1 point)

Soit une fonction f réelle intégrable et **impaire**. Sa TF $\widehat{f}(\lambda)$ vaut

1. $\widehat{f}(\lambda) = 0$
2. $\widehat{f}(\lambda) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\lambda t)\, dt$
3. $\widehat{f}(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\lambda t)\, dt$
4. $\widehat{f}(\lambda) = 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\lambda t)\, dt$

Solution: *La bonne réponse est la réponse 2. En effet*

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt$$

Or $e^{-2i\pi\lambda t} = \cos(-2\pi\lambda t) + i\sin(-2\pi\lambda t) = \cos(2\pi\lambda t) - i\sin(2\pi\lambda t)$ *(ATTENTION au signe - !) grâce aux propriétés de parité des* $\cos$ *et* $\sin$. *La fonction* $f(t)$ *étant intégrable et impaire,* $f(t)\cos(2\pi\lambda t)$ *est intégrable et impaire et* $f(t)\sin(2\pi\lambda t)$ *est intégrable et paire, d'ou:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\lambda t)\, dt = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\lambda t)\, dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\lambda t)\, dt$$

Question 2 (2 points)

Soit la fonction $f(t) = te^{-t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$. Sa TF vaut

1. $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{(1+2i\pi\lambda)^2}$
2. $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{1+2i\pi\lambda}$
3. $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{1+2i\pi\lambda^2}$

4. $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{1-2i\pi\lambda}$

Solution: *La bonne réponse est la réponse 1. On calcule l'intégrale*

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t}e^{-2i\pi\lambda t}\, dt$$

en faisant une intégration par parties.

$$\begin{cases} u = t & du = dt \\ dv = e^{-(1+2i\pi\lambda)t}dt & v = -\frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)} \end{cases}$$

Alors

$$\widehat{f}(\lambda) = \left[-t\frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}\, dt$$

La fonction $g(t) = t\frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}$ *s'annule pour* $t = 0$ *et tend vers* 0 *quand* t *tend vers l'infini, puisqu'en module*

$$\left|t\frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}\right| = \frac{|t|\, e^{-t}}{|1+2i\pi\lambda|}$$

quantité qui tend vers 0 *quand* t *tend vers l'infini (l'exponentielle "l'emporte" sur* $|t|$*!). On a donc*

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}\, dt = \frac{1}{(1+2i\pi\lambda)}\left[-\frac{e^{-(1+2i\pi\lambda)t}}{(1+2i\pi\lambda)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(1+2i\pi\lambda)^2}\left[-e^{-(1+2i\pi\lambda)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+2i\pi\lambda)^2} \end{aligned}$$

puisque $\left|e^{-(1+2i\pi\lambda)t}\right| = e^{-t}$ *qui tend vers* 0 *quand* t *tend vers l'infini.*

Question 3 (2 points)

On rapelle que la TF de la fonction $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ est la fonction

$$\widehat{f}(\lambda) = \pi\left(1 - \pi|\lambda|\right)\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]}(\lambda).$$

On en déduit par l'égalité de Parseval Plancherel que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$$

vaut

1. π
2. $\frac{2}{3}\pi$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. π^2

Solution:

La réponse correcte est la réponse 2. L'égalité de Pareseval Plancherel, nous dit que pour une fonction de carré intégrable - ce qui est le cas pour $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ – *on a la formule de conservation de l'énergie :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 \, d\lambda$$

Il suffit donc de calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 \, d\lambda = \pi^2 \int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} (1 - \pi |\lambda|)^2 \, d\lambda$$

Pour une intégration de ce type, on doit absolument se débarasser de la valeur absolue, soit en séparant en deux cas, $\lambda > 0$ *et* $\lambda < 0$*, soit comme ici, par un argument de parité. En effet, la fonction* $(1 - \pi |\lambda|)^2$ *est paire, donc*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 \, d\lambda &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1 - \pi\lambda)^2 \, d\lambda = 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} \left(1 - 2\pi\lambda + \pi^2\lambda^2\right) d\lambda \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{1}{\pi} - 2\pi.\frac{1}{2\pi^2} + \pi^2.\frac{1}{3\pi^3}\right] \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi}\right] = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Question 4 (2 points)

On pose

$$g(x) = a \exp(-ax) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \text{avec } a > 0$$

Alors $g * g(x)$ vaut

1. $g(x)$
2. $ax^2 \exp(-ax) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$
3. $\exp(-ax) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$
4. $a^2 x \exp(-ax) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$

Solution: *On a*

$$\begin{aligned} g * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x-t) g(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} a \exp(-a(x-t)) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-t) \, a \exp(-at) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t) \, dt \\ &= a^2 \int_{\mathbb{R}} \exp(-a(x-t)) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-t) \exp(-at) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t) \, dt \end{aligned}$$

On commence par raisonner sur les fonctions indicatrices, comme on l'a vu déjà.

1. *si* x *est fixé négatif, pour que les fonctions indicatrices soient non nulles on doit avoir à la fois* $t > 0$ *et* $x - t > 0$ *c.a.d.* $t < x$*, ce qui est impossible. En d'autres termes, pour* $x < 0$*, on a toujours l'une de ces fonctions indicatrices qui est nulle et l'intégrale est nulle. Ainsi*

$$g * g(x) = 0 \text{ pour } x < 0$$

2. *si $x \geq 0$ le raisonnement sur les indicatrices donnent : $0 \leq t \leq x$ ce qui limite l'intervalle d'intégration. Ainsi :*

$$\begin{aligned} g * g(x) &= a^2 \int_0^x e^{-a(x-t)} e^{-at}\, dt = a^2 \int_0^x e^{-ax}\, dt \\ &= a^2 e^{-ax} \int_0^x dt = a^2 x e^{-ax} \text{ pour } x \geq 0. \end{aligned}$$

C'est donc la réponse 4 qui est correcte.

Remarque: La solution précédente illustre l'application directe de la définition du produit de convolution. Il est également possible pour répondre à cette question, apres avoir verifié que la fonction g a les bonnes propriétés, d'utiliser la Tranformee de Fourier et les tables .

Exercice 1 (3 points). On considère la *fonction porte* $\Pi_2 = \mathbb{I}_{[-1,+1]}$

1. En utilisant la table des Transformées de Fourier (TF), donnez la TF de Π_2.
2. En déduire la TF de $\Pi_2 * \Pi_2$.
3. On rappelle que la fonction triangle $T_a(x) = \left(1 - 2\frac{|x|}{a}\right) \Pi_a(x)$ est $\widehat{T_a}(\lambda) = \frac{2\sin^2(\pi a\lambda/2)}{\pi^2 a \lambda^2}$ $(\lambda \neq 0)$. Exprimer alors $\Pi_2 * \Pi_2$ à l'aide d'une fonction triangle.

Solution:

1- On a par la table ou par un calcul direct simple:

$$\widehat{\Pi_2}(\lambda) = \frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda}$$

2- La fonction Π_2 étant intégrable, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi_2 * \Pi_2}(\lambda) &= \widehat{\Pi_2}(\lambda) \,.\, \widehat{\Pi_2}(\lambda) = \left(\frac{\sin(2\pi\lambda)}{\pi\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2(2\pi\lambda)}{\pi^2\lambda^2} \end{aligned}$$

3- Pour se ramener à la TF d'une fonction triangle, on doit prendre a tel que $\pi a\lambda/2 = 2\pi\lambda$ c.a.d. $a = 4$. Mais

$$\widehat{T_4}(\lambda) = \frac{2\sin^2(\pi 2\lambda)}{4\pi^2\lambda^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(2\pi\lambda)}{\pi^2\lambda^2}$$

Finalement

$$2\widehat{T_4}(\lambda) = \frac{\sin^2(2\pi\lambda)}{\pi^2\lambda^2} = \widehat{\Pi_2 * \Pi_2}(\lambda)$$

et par la propriété fondamentale de l'injectivité de la TF, on en déduit que

$$\Pi_2 * \Pi_2 = 2T_4$$

(à un ensemble négligeable prêt).

Exercice 2. Séries de Fourier (10 points).

On considère la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$\begin{cases} f(t) = \sin t \quad \text{pour } t \in [0, \pi[\\ f(t) = 0 \quad \text{pour } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f sur l'intervalle$[-4\pi, 4\pi[$.

2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

4. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$?

   On se propose de calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f. On rappelle à cet effet les formules de trigonométrie suivantes :

$$\begin{cases} \sin a \cos b = 1/2 \left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right] \\ \sin a \sin b = 1/2 \left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \end{cases}$$

5. Montrer que l'on a

$$\begin{cases} a_0 = 1/\pi \\ a_1 = 0 \\ a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)} \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^* \\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

6. Montrer que l'on a

$$\begin{cases} b_1 = 1/2 \\ b_n = 0 \text{ pour } n > 1 \end{cases}$$

7. Déduire avec précision de tout ce qui précède que l'on a **quelque soit t dans R**

$$f(t) = 1/\pi + 1/2 \sin t + 2/\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

8. En choisissant une valeur particulière pour t, montrer que l'on a l'identité suivante :

$$\pi/4 = 1/2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{1-4p^2}.$$

Solution: *La courbe - des morceaux de sinus reliés par des morceaux de l'axe des x - montre que la fonction est continue. Graphiquement, il n'y a pas de saut dans le tracé! De façon plus mathématique, en $t = \pi$ par exemple, on a $\lim_{t \to \pi^-} \sin t \ = 0 = f(0) = \lim_{t \to \pi^+} f(t)$. Par contre en ce point $t = \pi$, la fonction n'est pas dérivable puisque que l'on a une demi tangente à droite et une demi tangente à* *gauche qui sont différentes. La fonction f n'est donc pas C^1 sur R. Mais elle est C^1 par morceaux sur R, puisque en dehors de ces points, la dérivée existe et est continue par morceaux.*

On a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 1/\pi$$

Calculons a_n $(n \geq 1)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos nt\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(1+n)t + \sin t(1-n)t\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)t}{(1+n)} + \frac{-\cos(1-n)t}{(1-n)}\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Dans le dernier facteur, on doit avoir $n \neq 1$ pour ne pas diviser par 0, et c'est pour cette raison, que l'on fera un calcul à part. Prenons donc ici $n > 1$. On a

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(1+n)} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)}\right]$$

avec $\cos(1+n)\pi = (-1)^{n+1}$ et $\cos(1-n)\pi = (-1)^{n-1}$. Mais ces deux quantités sont égales puisque les entiers $n+1$ et $n-1$ ont la même parité. Ainsi

$$a_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2\pi}\left[\frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1-n)}\right] = \frac{\left(1-(-1)^{n+1}\right)}{\pi(1-n^2)}$$

Pour $n = 2p+1$, on a $1-(-1)^{n+1} = 0$ et pour $n = 2p$, $1-(-1)^{n+1} = 2$ et alors

$$a_{2p} = \frac{2}{\pi(1-4p^2)}$$

Pour $n = 1$, on reprend le calcul au début. Soit

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt = 0$$

Pour les b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin nt\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-n)t - \cos(1+n)t\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)t}{(1-n)} - \frac{\sin(1+n)t}{(1+n)}\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

et là encore, on met à part le cas $n = 1$.

Pour $n > 1$, $b_n = 0$ puique $\sin k\pi = 0 = \sin 0$.

Pour $n = 1$, on repart de l'expression

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - \left[1/2\sin 2t\right]_0^{\pi}\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rappelons que n'importe quelle fonction 2π-périodique ne s'écrit pas comme somme de sa série de Fourier en n'importe quel point! Il y a des conditions suffisantes, qui sont les conditions de Dirichlet, *et qui exigent une certaine "régularité" de la fonction. Ces conditions sont à connaître et c'est l'un des points fondamentaux du cours sur la décomposition en série de Fourier.*

Ici, la fonction est C^1 par morceaux sur R, donc les conditions de Dirichlet sont vérifées. De plus la fonction est continue sur R, la formule de décomposition sera vraie pour tout t dans R (alors qu'en un point de discontinuité, la série de Fourier converge vers la demi somme des limites à droite et à gauche). Ici, on a

$$f(t) = 1/\pi + 1/2 \sin t + 2/\pi \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(2pt)}{1-4p^2}$$

quelque soit t dans R.

La dernière égalité s'obtient facilement en prenant $t = \frac{\pi}{2}$.