Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier - Convolution

Exercices type 3 : entièrement corrigés

Exercice 1.

1- Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-ax}U(x)$ où $U(x) = \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x)$ et $a > 0$ est un paramètre fixé.

2- En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, en déduire que la TF de la fonction $g(x) = x^{n-1}e^{-ax}U(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit

$$\widehat{g}(t) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-1} \left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t)$$

3- Calculer cette dérivée d'ordre $n - 1$ de $\widehat{f}$ et en déduire la transformée de Fourier de

$$\frac{x^{n-1}e^{-ax}}{(n-1)!}U(x)$$

Exercice 2.

On cherche les fonctions à valeurs réelles, paires, continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(2\pi xt) dx = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t) (1 - |t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que ceci revient à chercher f vérifiant

$$\widehat{f}(t) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t) (1 - |t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2. En déduire que

$$f(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

3. En déduire très simplement la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - \cos 2\pi x}{x^2} dx = \pi^2$$

On rappelle que $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Correction exercice 1

1- Par définition, on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} U(x) e^{-2i\pi tx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-2i\pi tx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi t)x} dx = \left[-\frac{1}{a+2i\pi t} e^{-(a+2i\pi t)x} \right]_0^{+\infty}\end{aligned}$$

On a $|e^{-(a+2i\pi t)x}| = e^{-ax}$ puisque $|e^{-2i\pi tx}| = 1$ et donc, quand x tend vers $+\infty$ le module du nombre complexe $e^{-(a+2i\pi t)x}$ tend vers 0 ce qui signifie encore que ce nombre complexe tend vers 0. Pour $x = 0$ on a $e^{-(a+2i\pi t)x}$ qui vaut 1 et donc

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{a+2i\pi t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

2- On sait que "sous les bonnes conditions" (cf. le théorème de dérivation de la TF paragraphe 3.4 Prop. 5) on obtient la dérivée d'ordre $n-1$ de $\widehat{f}$ par dérivation sous le signe $\int$ à savoir

$$\left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x)^{n-1} f(x) e^{-2i\pi tx} dx = (-2i\pi)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} f(x) e^{-2i\pi tx} dx$$

Une autre façon de lire cette formule est de dire qu'alors, la transformée de Fourier de $x^{n-1}f(x)$ s'obtient, au coefficient $\left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-1}$ près, comme dérivée d'ordre $n-1$ de $\widehat{f}$. Ce que l'on peut écrire

$$\widehat{(x^{n-1}f(x))}(t) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-1} \left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t)$$

Remarque 1 Il faut bien comprendre la notation utilisée ici : nous avons dû garder la variable x pour désigner la fonction $x^{n-1}f(x)$ et nous exprimons sa TF en t . Pour éviter cette notation un peu lourde, on peut faire comme dans l'énoncé : poser $g(x) = x^{n-1}f(x)$ et écrire que $\widehat{g}(t) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^{n-1} \left(\widehat{f}\right)^{(n-1)}(t)$. Il est néanmoins utile de savoir utiliser cette écriture et de bien comprendre le rôle joué par chaque variable.

Les "bonnes conditions" évoquées plus haut, portent sur l'intégrabilité des fonctions $x^k f(x)$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Ces conditions sont vérifiées ici, puisque les fonctions $x^k e^{-ax} U(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ quelque soit k ou encore $x^k e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ quelque soit k , ce qui est bien connu.

3- Alors pour calculer la TF de g reste à calculer la dérivée d'ordre $n-1$ de la fonction $\frac{1}{a+2i\pi t}$. Le plus simple est sans doute d'écrire $\frac{1}{a+2i\pi t}$ sous la forme $(a+2i\pi t)^{-1}$ et de calculer la dérivée d'ordre $n-1$ de cette fonction. La dérivée d'une fonction puissance entière fait "tomber" la

puissance devant la fonction, puis diminue la puissance d'une unité. Intervient aussi à chaque dérivation, la dérivée de la fonction de t à l'intérieur de la parenthèse, à savoir ici $2i\pi$ (dérivée d'une fonction composée). C'est la formule

$$\left[u(t)^k \right]' = k u(t)^{k-1} u'(t) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi lorsque l'on réalise la dérivée jusqu'à l'ordre $n - 1$ de $(a + 2i\pi t)^{-1}$, on obtient

$$\left[(a + 2i\pi t)^{-1} \right]^{(n-1)} = (-1)^{(n-1)} (n-1)! (2i\pi)^{(n-1)} (a + 2i\pi t)^{-n}$$

Les termes $(-1)^{(n-1)}$ et $(n-1)! = 1.2 \dots (n-1)$ proviennent respectivement du $-$ de la puissance et des entiers, qui tombent à chaque dérivation. Pour le lecteur manquant de technique, il est conseillé de calculer la dérivée première, puis la dérivée seconde, éventuellement la troisième dérivée, pour voir comment *fonctionne* la formule!

Après simplification

$$\widehat{g}(t) = \left(-\frac{1}{2i\pi} \right)^{n-1} \left(\widehat{f} \right)^{(n-1)}(t) = (n-1)! (a + 2i\pi t)^{-n}$$

et donc

$$\left(\frac{x^{n-1} \widehat{e^{-ax}}}{(n-1)!} U(x) \right) (t) = (a + 2i\pi t)^{-n} = \frac{1}{(a + 2i\pi t)^n} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Correction exercice 2

1. On a

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi tx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(2\pi tx) dx + i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(2\pi tx) dx$$

Comme on a supposé la fonction $f(x)$ paire, la fonction $x \rightarrow f(x) \sin(2\pi tx)$ est impaire et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. Donc

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(2\pi tx) dx$$

2. En utilisant la table de Transformée de Fourier, on s'aperçoit que la fonction triangle $h(t) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t) (1 - |t|)$ a pour TF la fonction $\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ (attention aux variables! ... il est essentiel de les distinguer). La fonction $\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: en effet, on sait qu'elle est continue comme toute transformée de Fourier de fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (Proposition 3) donc il n'y aura pas de problème en $x = 0$. Au voisinage de $\pm\infty$ on a la majoration par $\frac{1}{\pi^2 x^2}$ qui est une fonction intégrable. On peut alors prendre sa Transformée de Fourier comme fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et d'après le corollaire 10 du cours, on obtient la symétrisée h_σ . Mais la fonction h étant paire, on a $h_\sigma = h$. La fonction $\frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ a bien comme TF la fonction $\mathbb{I}_{[-1,1]}(t) (1 - |t|)$. Ainsi $f(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ est solution du problème.

3. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} e^{-2i\pi t x} dx = \mathbb{I}_{[-1,1]}(t) (1 - |t|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

En prenant cette formule pour $t = 0$, en utilisant la parité de la fonction puis la formule rappelée, on en déduit immédiatement le résultat.