Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier et Convolution

Exercices "Type 2" : correction détaillée

Correction de l'exercice 1

1) Intéressons nous d'abord à la dérivabilité de la fonction f. Il faut dériver par rapport à λ qui est un paramètre de l'intégrale ; nous devons donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Première étape, nous choisissons un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, un voisinage de λ_0 et nous regardons si la fonction $\lambda \to e^{-x^2} \cos(\lambda x)$ est dérivable par rapport à λ. Cela revient à examiner la dérivabilité du cosinus. La fonction $\lambda \to e^{-x^2} \cos(\lambda x)$ est bien dérivable dans le voisinage de λ_0. La dérivée a pour expression :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[e^{-x^2} \cos(\lambda x)\right] = -x\, e^{-x^2} \sin(\lambda x)$$

Cherchons une majoration du module. Nous pouvons majorer le sinus par 1, nous obtenons :

$$\left|x\, e^{-x^2} \sin(\lambda x)\right| \leq \left|x\, e^{-x^2}\right| = h\,(x)$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \left|x\, e^{-x^2}\right| \, dx = 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx = 2\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = 1$$

la fonction $h\,(x) = \left|x\, e^{-x^2}\right|$ est intégrable ce qui permet d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Alors

$$f'(\lambda) = -\int_{\mathbb{R}} x\, e^{-x^2} \sin(\lambda x)\, dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Essayons à partir de cette intégrale de faire apparaître f en utilisant l'intégration par parties suivante

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \sin(\lambda x) & du = \lambda \cos(\lambda x)\, dx \\ dv = -x\, e^{-x^2} dx & v = \frac{1}{2} e^{-x^2} \end{array}\right.$$

On a

$$f'(\lambda) = \left[\sin(\lambda x)\, \frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(\lambda x)\, dx = \left[\sin(\lambda x)\, \frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\lambda f(\lambda).$$

Examinons la valeur du premier terme du membre de droite. Nous avons l'inégalité suivante

$$\left|\sin(\lambda x)\, \frac{1}{2} e^{-x^2}\right| \leq \frac{1}{2} e^{-x^2} = h\,(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to \pm\infty$$

Donc ce terme est nul. Ainsi $f(\lambda)$ vérifie l'équation différentielle

$$f'(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda f(\lambda)$$

2) Cette équation différentielle a pour solution générale :

$$f(\lambda) = C\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

La constante s'obtient pour $\lambda = 0$ avec

$$C = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

donc

$$f(\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Avec $g(x) = e^{-x^2}$ le calcul direct donne

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-2i\pi\lambda x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(2\pi\lambda x)\, dx - i \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sin(2\pi\lambda x)\, dx$$

Grâce à la parité de $g(x)$ la partie imaginaire de l'expression précédente est nulle et donc :

$$\widehat{g}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(2\pi\lambda x)\, dx = f(2\pi\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\lambda^2}$$

Nous retrouvons l'expression de f, nous pouvons donc exprimer la transformée de Fourier par :

$$\widehat{g}(\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\lambda^2}$$

Correction de l'exercice 2

Nous avons deux manières différentes pour calculer ce produit de convolution : le calcul direct ou le calcul par TF.

Calcul direct

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc la fonction $f * f$ appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Par définition, le produit de convolution de f par f s'écrit :

$$\begin{aligned}
f * f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-u)\, f(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(x^2-2xu+2u^2\right)}{2}} du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}-xu+u^2\right)} du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[\left(\frac{x}{2}-u\right)^2+\frac{x^2}{4}\right]} du \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{2}-u\right)^2} du
\end{aligned}$$

Nous effectuons le changement de variable :

$$t = -\frac{x}{2} + u \Longleftrightarrow dt = du$$

ce qui donne (le domaine d'intégration reste identique) :

$$f * f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$$

or $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, donc :

$$f * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Calcul par TF

Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,nous avons :

$$\widehat{f * f} = \widehat{f}.\widehat{f} = \left(\widehat{f}\right)^2 \tag{1}$$

Or d'après la table des TF :

$$e^{-ax^2} \xrightarrow{TF} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}$$

donc :

$$\widehat{f}(t) = e^{-2\pi^2 t^2} \tag{2}$$

En combinant (1) et (2) :

$$\widehat{f * f}(t) = e^{-4\pi^2 t^2}$$

Par transformée de Fourier inverse *i.e.*par la lecture du tableau des transformées de Fourier dans l'autre sens, nous obtenons finalement :

$$f * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$