Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier et Convolution

QCM de cours

Ce QCM sert à vous autoévaluer sur votre assimilation du cours de la semaine 3 sur la Transformée de Fourier et le produit de convolution. Il se compose de questions traitant des formules fondamentales du cours. Elles sont directement liées au cours et ne nécessitent pas de calcul.

1- Soit une fonction f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est définie par

A - $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(2i\pi\lambda t)\, dt$
B - $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2i\pi\lambda t)\, dt$
C - $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} \exp(-2i\pi\lambda t)\, dt$

2- Soit la fonction $f(t) = \mathbb{I}_{\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]}(t)$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\lambda)$ vaut

A - $\frac{\sin^2 \pi a\lambda}{(\pi\lambda)^2}$
B - elle-même
C - $\frac{\sin \pi a\lambda}{\pi\lambda}$

3- Quelle est la transformée de Fourier du conjugué d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$:

A - $\widehat{\left(\overline{f}\right)}(\lambda) = \overline{\left(\widehat{f}\right)}(-\lambda)$
B - $\widehat{\left(\overline{f}\right)}(\lambda) = \overline{\left(\widehat{f}\right)}(\lambda)$
C - $\widehat{\left(\overline{f}\right)}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$

4- Quelle est la transformée de Fourier, notée $\widehat{f_\sigma}$, de la fonction symétrisée de f, notée f_σ et définie par $f_\sigma(x) = f(-x)$

A - $\widehat{f_\sigma}(\lambda) = \left(\widehat{f}\right)_\sigma(\lambda)$
B - $\widehat{f_\sigma}(\lambda) = \left(\widehat{f}\right)_\sigma(-\lambda)$
C - $\widehat{f_\sigma}(\lambda) = -\widehat{f}(\lambda)$

5- Quelle est la transformée de Fourier de la translatée $f(t-a)$ de f

A - $\widehat{f}(\lambda - a)$
B - $e^{-2i\pi\lambda a}\widehat{f}(\lambda)$
C - $e^{2i\pi\lambda a}\widehat{f}(\lambda - a)$

6- Soit une fonction f ayant pour transformee de Fourier $\widehat{f}$. Quelle est la transformée de Fourier de $e^{2i\pi at} f(x)$:

A - $\widehat{f}(\lambda - a)$
B - $e^{-2i\pi\lambda a}\widehat{f}(\lambda)$

C - $e^{2i\pi\lambda a}\widehat{f}(\lambda - a)$

7- Soit f une fonction réelle et paire alors :

A - $\widehat{f}$ imaginaire et paire
B - $\widehat{f}$ réelle et impaire
C - $\widehat{f}$ réelle et paire

8- Soit f une fonction impaire alors :

A - $\widehat{f}$ imaginaire pure
B - $\widehat{f}$ impaire
C - $\widehat{f}$ réelle et paire

9- Soit f une fonction réelle et impaire alors :

A - $\widehat{f}$ imaginaire pure et impaire
B - $\widehat{f}$ réelle et impaire
C - $\widehat{f}$ réelle et paire

10- Soit une fonction f ayant pour transformée de Fourier $\widehat{f}$. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $t^2.f$

A - $\widehat{t^2.f}(\lambda) = \lambda \widehat{f}(\lambda)$
B - $\widehat{t^2.f}(\lambda) = -4\pi^2\lambda^2\widehat{f}(\lambda)$
C - $\widehat{t^2.f}(\lambda) = \frac{1}{-4\pi^2}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\widehat{f}(\lambda)\right]$

11- Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Quelle est la transformée de Fourier de la dérivée troisième de f (en supposant que f possède toutes les bonnes propriétés)

A - $\widehat{f^{(3)}}(\lambda) = \frac{1}{(-2i\pi)^3}\frac{d}{d\lambda^3}\left(\widehat{f}(\lambda)\right)$
B - $\widehat{f^{(3)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^3\widehat{f}(\lambda)$
C - $\widehat{f^{(3)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^3\left(\widehat{t^3 f}(\lambda)\right)$

12- Soit une fonction f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, sa *transformée de Fourier inverse* est définie par
A - $\mathcal{F}^*(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(2i\pi\lambda t)\,dt$
B - $\mathcal{F}^*(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-2i\pi\lambda t)\,dt$
C - $\mathcal{F}^*(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\exp(-2i\pi\lambda t)\,dt$

13- Soit la fonction f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et telle que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\right)$

A - $= f$
B - n'est pas définie
C - $= f \quad p.p.$

14- Soit f et g appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda)$ alors

A - $f = g$
B - $f = \overline{g}$
C - $f = g \quad p.p.$

15- Soit la fonction f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et telle que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(\mathcal{F})(f)$ est égal à

A - f partout
B - f_σ partout
C - $f \quad p.p.$

16- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution en u, noté $f \star g\ (u)$ est défini par :

A - $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(t)\, dt$
B - $\int_{\mathbb{R}} f(t-u)\, g(t)\, dt$
C - $\int_{\mathbb{R}} f(t-u)\, g(t+u)\, dt$

17- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f \star g$:

A - appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
B - appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
C - n'existe pas

18- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, nous avons alors la relation :

A - $\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(t)$
B - $\widehat{f \star g}(t) = \mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)(t)$
C - $f \star g(t) = \mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)(t)$

19- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, si on suppose de plus que fg, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nous avons alors la relation :

A - $\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t) \star \widehat{g}(t)$
B - $\widehat{f.g}(t) = \widehat{f \star g}(t)$
C - $\widehat{f.g}(t) = \widehat{f}(t) \star \widehat{g}(t)$

20- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, nous avons alors la relation :

A - $\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(t)$
B - $\widehat{f \star g}(t) = \mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)(t)$
C - $f \star g(t) = \mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\widehat{g}\right)(t)$

QCM de cours : correction

Nous donnerons, pour chaque question, la réponse exacte et le passage du cours qui correspond. Lorsque les questions ne seront pas une formule du cours, nous écrirons quelques lignes de justification.

1- B (page 38, paragraphe 3.1, définition 1)
2- C (page 38, paragraphe 3.1). Cette transformée de Fourier est fondamentale et doit être connue.
3- A (page 39, paragraphe 3.3, propostion 2i)
4- A (page 39, paragraphe 3.3, proposition 2ii)
5- B (page 40, paragraphe 3.3, proposition 2iii)
6- A (page 40, paragraphe 3.3, proposition 2iv)
7- C (page 40, paragraphe 3.3, proposition 2v)
8- B (page 40, paragraphe 3.3, proposition 2v)
9- A (page 40, paragraphe 3.3, proposition 2v)
10- C (page 41, paragraphe 3.4, proposition 3ii)
11- B (page 41, paragraphe 3.4, proposition 3iv)
12- A (page 42, paragraphe 3.5, définition 3)
13- C (page 42, paragraphe 3.5, théorème 1i)
14- C (page 43, paragraphe 3.5, corollaire 1)
15- B (page 44, paragraphe 3.5, corollaire 2)
16- B (page 48, paragraphe 3.7.1, définition 4)
17- **A** (page 49, paragraphe 3.7.1, proposition 6ii)
18- **A** (page 50, paragraphe 3.7.2, proposition 7i)
19- **C** (page 50, paragraphe 3.7.2, proposition 7i)
20- C (page 50, paragraphe 3.7.2, proposition 7iii)