Chapitre 3

Transformée de Fourier des Fonctions et Produit de Convolution

Dans ce chapitre, on généralise l'idée de décomposition en Séries de Fourier au cas où la fonction (le signal) n'est pas périodique. Lors de la première semaine, nous avons vu que pour un signal f qui est a-périodique, les fréquences contenues dans le signal sont les multiples de $\frac{1}{a}$ soient les fréquences $\frac{n}{a}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On cherche alors le poids de chacune de ces fréquences de base dans le signal d'origine, en calculant les coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}}\, dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Puis, on essaye d'écrire (conditions de Dirichlet) le signal $f(t)$ à partir de ces *harmoniques* de base

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\; e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$$

Pour un signal qui n'est pas périodique, il n'y a plus de fréquences privilégiées, et on doit chercher la répartition de *toutes les fréquences possibles* sur $\mathbb{R}$. On dit aussi que l'on passe du domaine *temporel* $f(t)$ au domaine *fréquentiel* $\widehat{f}(\lambda)$. La famille dénombrable de coefficients $c_n(f)$ avec n dans $\mathbb{Z}$ est alors remplacée par la fonction de λ

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(remarquer l'analogie des formules !) appelée *Transformée de Fourier de f*. De la même façon que l'on essayait de décomposer le signal périodique à partir de ses harmoniques de base, on essaiera ici de reconstruire le signal f à partir de sa *répartition des fréquences* - encore appelée *spectre des fréquences* - par une formule de Transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\, e^{+2i\pi\lambda t}\, d\lambda$$

3.1 Définition et terminologie

Définition 1 *Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la* ***transformée de Fourier*** *de f comme étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$*

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

L'égalité $\left|f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\right| = |f(t)|$ montre que la fonction $t \to f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}$ est intégrable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc $\widehat{f}(\lambda)$ est bien définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Voici un exemple élémentaire de calcul de transformée de Fourier (ce résultat est à connaître car il est fondamental en traitement du signal). Considérons la *fonction porte* $\Pi_a(t) = \mathbb{I}_{\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]}(t)$ avec $a > 0$. On a

$$\widehat{\Pi_a}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \Pi_a(t)\; e^{-2i\pi\lambda t}\, dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2i\pi\lambda t}\, dt$$

Pour $\lambda \neq 0$

$$\widehat{\Pi_a}(\lambda) = \left[-\frac{1}{2i\pi\lambda} e^{-2i\pi\lambda t}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{\pi\lambda}\frac{e^{i\pi\lambda a} - e^{-i\pi\lambda a}}{2i} = \frac{\sin\pi a\lambda}{\pi\lambda}$$

Pour $\lambda = 0$

$$\widehat{\Pi_a}(0) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dt = a$$

Définition 2 *Si l'on écrit $\widehat{f}(\lambda)$ sous la forme polaire $\widehat{f}(\lambda) = A(\lambda)\, e^{i\phi(\lambda)}$ (avec $A(\lambda) > 0$ et $\phi(\lambda)$ défini modulo 2π) on utilise la terminologie suivante*

$$\begin{cases} A(\lambda) \text{ est appelé le } \textbf{spectre} \text{ de } f \\ A^2(\lambda) \text{ est appelée l'}\textbf{énergie spectrale} \text{ de } f \\ \phi(\lambda) \text{ est appelée la } \textbf{phase spectrale} \text{ de } f \end{cases}$$

3.2 Propriétés communes à toute transformée de Fourier

La transformée de Fourier de n'importe quelle fonction intégrable a des propriétés caractéristiques que nous énonçons dans la proposition suivante.

Proposition 1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier vérifie*

i) $\widehat{f}(\lambda)$ est une fonction ***continue*** *sur $\mathbb{R}$*

ii) $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \widehat{f}(\lambda) = 0$ i.e. $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini

iii) si on pose $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\lambda)\right|$ on a

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Par exemple, $\widehat{\Pi_a}(\lambda)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$: le seul problème de continuité pourrait apparaître en 0 mais $\sin \pi a\lambda \sim \pi a \lambda$ au voisinage de 0 et donc

$$\lim_{\lambda \to 0} \widehat{\Pi_a}(\lambda) = a = \widehat{\Pi_a}(0)$$

D'autre part, on a bien

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \widehat{\Pi_a}(\lambda) = 0$$

Preuve. i) La continuité de $\widehat{f}(\lambda)$ a été vue comme application du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (*cf.* Cours Semaine 2).

ii) Nous admettrons le comportement à l'infini de $\widehat{f}(\lambda)$

iii) On majore

$$\left|\widehat{f}(\lambda)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|f(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\right| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$$

Cette majoration étant vraie quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on en déduit bien que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\lambda)\right| \leq \|f\|_1$$

■

3.3 Propriétés algébriques de la transformée de Fourier

On résume dans ce qui suit des propriétés simples et faciles à démontrer. (Faire ces petits calculs à titre d'exercices).

Proposition 2 ***Propriétés algébriques de la transformée de Fourier.***

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f}(\lambda) = A(\lambda)\, e^{i\phi(\lambda)}$ sa transformée de Fourier.

i) ***Conjugaison***

$$\widehat{\left(\overline{f}\right)}(\lambda) = \overline{\left(\widehat{f}\right)}(-\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ou plus rapidement

$$\overline{f}\,(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \overline{\widehat{f}}\,(-\lambda)$$

On en déduit que si f est à valeurs ***réelles***

$$\widehat{f}\,(-\lambda) = \overline{\left(\widehat{f}\right)}\,(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc

$$A(-\lambda) = A(\lambda) \quad et \quad \phi(-\lambda) = -\phi(\lambda) \pmod{2\pi} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ii) ***Symétrisée*** *Si l'on note f_σ la* ***symétrisée*** *de f i.e. $f_\sigma(x) = f(-x)$, alors*

$$\widehat{(f_\sigma)}(\lambda) = \left(\widehat{f}\right)_\sigma(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

soit

$$f(-t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f}(-\lambda)$$

iii) ***Translation*** *Si l'on note* $\tau_a(f)(x) = f(x-a) \quad (a \in \mathbb{R})$ *la translatée de* f*, on a*

$$(\widehat{\tau_a(f)})(\lambda) = e^{-2i\pi\lambda a}\,\widehat{f}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

soit

$$f(t-a) \quad \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad e^{-2i\pi\lambda a}\,\widehat{f}(\lambda)$$

i.e. la translation transforme la phase $\phi(\lambda) \to \phi(\lambda) - 2\pi\lambda a \pmod{2\pi}$ *et ne modifie pas le spectre*

iv) ***Propriété inverse***

$$e^{2i\pi xa}\,f(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f}(\lambda - a)$$

v) ***Parité***

$$\begin{cases} f \quad paire & \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f} \quad paire \\ f \quad impaire & \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f} \quad impaire \\ f \quad réelle\ paire & \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f} \quad réelle\ (paire) \\ f \quad réelle\,impaire & \overset{\mathcal{F}}{\to} \quad \widehat{f} \quad imaginaire\ pure\ (impaire) \end{cases}$$

A titre d'exemple, démontrons la formule

$$\widehat{(f_\sigma)}(\lambda) = \left(\widehat{f}\right)_\sigma(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On a

$$\widehat{(f_\sigma)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{-2i\pi\lambda t}\, dt$$

Par le changement de variables $u = -t$ on a $du = -dt$ et en même temps les bornes sont changées, donc

$$\widehat{(f_\sigma)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{2i\pi\lambda u}\, du = \widehat{f}(-\lambda) = \left(\widehat{f}\right)_\sigma(\lambda)$$

Par exemple, on lit dans le tableau des transformations de Fourier, que la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ est donnée par $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{(a+2i\pi\lambda)}$. Alors $f_\sigma(t) = e^{at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^-}(t)$ aura pour transformée de Fourier, la fonction $\widehat{(f_\sigma)}(\lambda) = \frac{1}{(a-2i\pi\lambda)}$.

3.4 Transformée de Fourier et Dérivation

La transformée de Fourier a d'importantes propriétés en liaison avec la dérivation. Celles-ci sont réunies dans la proposition suivante. On a deux types de résultats : l'un portant sur la *dérivée d'une transformée de Fourier*, l'autre sur la *transformée de Fourier de la dérivée.*

Proposition 3 *i) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $tf(t)$ soit aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}(\lambda)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{f}(\lambda)\right) = \left[\widehat{f}(\lambda)\right]' = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)\ f(t)\ e^{-2i\pi\lambda t}\,dt \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Il est utile de lire cette formule de la façon suivante (à écrire et à bien comprendre)

$$tf(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\to} \qquad \frac{1}{(-2i\pi)}\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{f}(\lambda)\right)$$

Ceci se généralise facilement pour la dérivée d'ordre n.

ii) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $t^k f(t)$ soit aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour $k = 1, \cdots, n$. Alors, la fonction $\widehat{f}(\lambda)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\frac{d}{d\lambda^k}\left(\widehat{f}(\lambda)\right) = \left[\widehat{f}(\lambda)\right]^{(k)} = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)^k\ f(t)\ e^{-2i\pi\lambda t}\,dt \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

que l'on peut écrire

$$t^k f(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\to} \qquad \frac{1}{(-2i\pi)^k}\frac{d}{d\lambda^k}\left(\widehat{f}(\lambda)\right)$$

iii) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $f'(\lambda)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\widehat{[f']}(\lambda) = (2i\pi\lambda)\ \widehat{f}(\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

soit

$$f'(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\to} \qquad (2i\pi\lambda)\ \widehat{f}(\lambda)$$

Ceci se généralise

iv) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $f\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et que $f^{(k)}(\lambda)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, \cdots, n$. Alors

$$\widehat{\left[f^{(k)}\right]}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k\ \widehat{f}(\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

soit

$$f^{(k)}(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\to} \qquad (2i\pi\lambda)^k\ \widehat{f}(\lambda)$$

v) En particulier, si $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et f est ***à support compact****, alors $\widehat{f}$ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

La transformée de Fourier échange dérivation et multiplication par un monôme.

Preuve. i) et ii) Là encore c'est une conséquence du Théorème de Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre (*cf.* Cours semaine 2).

iii) et iv) Nous admettrons cette propriété

v) Rappelons que, grosso modo, le support de f est l'ensemble des points où f est non nulle. Dire que f est à support compact signifie que f sera nulle en dehors d'un certain intervalle $[a, b]$ avec a et b finis. En quelque sorte la fonction f **vit** dans l'intervalle $[a, b]$. Il est souvent commode de remplacer l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle symétrique $[-A, A]$ ce que l'on peut toujours faire. Alors, quelque soit l'entier k on peut majorer

$$\left|t^k f(t)\right| \leq A^k\,|f(t)|$$

puisque dans $[-A, A]$ on a$\left|t^k\right| \leq A^k$ et en dehors de $[-A, A]$ les deux termes sont nuls. La fonction $A^k |f(t)|$ étant intégrable, la condition ii) de la proposition est vérifiée quelque soit l'entier k, et $\widehat{f}$ est dérivable à n'importe quel ordre et donc une fonction de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. ■

Par exemple, on lit dans la table des Transformées de Fourier, que $f(t) = e^{-t^2}$ a pour transformée de Fourier $\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\lambda^2}$. Considérons $f'(t) = -2te^{-t^2}$ qui reste une fonction intégrable (Pourquoi ?), *sans calcul*, en appliquant le point iii) on a

$$-2te^{-t^2} \qquad \stackrel{\mathcal{F}}{\to} \qquad (2i\pi\lambda)\left(\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\lambda^2}\right)$$

ou encore

$$te^{-t^2} \qquad \stackrel{\mathcal{F}}{\to} \qquad (-i\pi\lambda)\left(\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\lambda^2}\right)$$

3.5 Formule d'inversion de la transformée de Fourier

Comme pour la décomposition en séries de Fourier, il est fondamental d'essayer de **reconstruire** f à l'aide de sa transformée de Fourier.

Définition 3 ***Transformée de Fourier inverse***. *Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier inverse par*

$$\mathcal{F}^*\ (f)\ (\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{+2i\pi\lambda t}\, dt \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Elle possède des propriétés tout à fait analogues à celles de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$. Voici le théorème de reconstruction de f à partir de sa transformée de Fourier inverse. Bien remarquer qu'en remplaçant l'intégrale par une somme de séries, et $\widehat{f}(\lambda)$ par les coefficeints de Fourier $c_n(f)$, il s'agit de l'analogue, pour une fonction non périodique, de la décomposition en série de Fourier.

Théorème 1 *Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors*

i)

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\, e^{+2i\pi\lambda t}\, d\lambda \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

soit

$$f = \mathcal{F}^*\left(\widehat{f}\right) \quad p.p.$$

*ii) L'égalité précédente a lieu en **tout point de continuité** de f.*

On a donc un résultat simple, sous les hypothèses du Théorème. On voit ici réapparaître la notion d'ensembles négligeables que nous avons étudié dans la chapitre précédent et c'est l'introduction de cette notion qui permet d'obtenir un résultat si concis et élégant.

Malgré tout, cet ensemble négligeable de points, pour lesquels cette formule est fausse, est gênant dans la pratique car si l'on veut écrire la formule pour un certain t_0 ce point est-il ou non dans cet ensemble négligeable ? La deuxième partie donne une précision importante : si t_0 est un **point de continuité** de f alors la formule d'inversion est vraie en t_0. En particulier, si f est continue sur $\mathbb{R}$, la formule sera vraie partout.

Exemple : *On a facilement par un calcul direct (voir aussi la table)*

$$f(t) = e^{-|t|} \qquad \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \qquad \widehat{f}(\lambda) = \frac{2}{1+4\pi^2\lambda^2}$$

Cette fonction $\widehat{f}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$ *(Pourquoi ?). De plus,* $f(t)$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2\lambda^2} e^{+2i\pi\lambda t}\, d\lambda = e^{-|t|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Bien prendre garde aux variables d'intégration : ici on intègre en λ *et on obtient une fonction de* t*). Comme* $\widehat{f}(\lambda)$ *est une fonction paire, la partie d'intégrale en* $\sin(2\pi\lambda)$ *est nulle (Pourquoi ?) et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2\lambda^2} \cos(2\pi\lambda t)\, d\lambda = e^{-|t|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ou encore, par parité

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{4}{1+4\pi^2\lambda^2} \cos(2\pi\lambda t)\, d\lambda = e^{-|t|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En posant $u = 2\pi\lambda t$ *et si* $t > 0$ *on en déduit facilement (faire les détails du calcul)*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos u}{t^2+u^2} du = \frac{\pi}{2t} e^{-|t|}$$

Pour $t < 0$ *on posera* $u = -2\pi\lambda t$*. Faire le calcul. Finalement, on obtient*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos u}{t^2+u^2} du = \frac{\pi}{2|t|} e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Corollaire 1 ***Injectivité de la transformée de Fourier****. Soient* f *et* g *dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$*, Alors*

$$\widehat{f}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f = g \quad p.p.$$

Deux fonctions intégrables, ayant même transformée de Fourier sont égales presque partout.

Preuve. C'est une conséquence simple du théorème d'inversion précédent. Posons $h = f - g$. On a $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et par hypothèse $\widehat{h} = 0$. Comme $\widehat{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème d'inversion et

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\lambda) e^{+2i\pi\lambda x}\, d\lambda = 0 \quad p.p.$$

Ce qui s'écrit encore $f = g$ p.p ■

Il est souvent utile de prendre la transformée de Fourier de la transformée de Fourier d'une fonction f (si c'est possible). A cause du changement de signe dans la définition de la transformée inverse, on ne récupère pas la fonction f mais sa symétrisée.

Corollaire 2 *Soit f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec de plus f **continue** sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F})(f) = f_\sigma$$

ou encore

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = f(-t) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercice : *On a pour $a > 0$*

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \widehat{f}(\lambda) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\lambda^2}$$

Alors

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = f_\sigma(t) = e^{-a|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

puisque f est une fonction continue paire. En déduire que $\frac{1}{a^2+t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\lambda|}$

Solution : *Il y là un petit travail sur les constantes qu'il faut maîtriser. D'après ce qui précéde, on a*

$$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\lambda^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-a|t|}$$

En factorisant le terme $4\pi^2$ pour avoir le facteur λ^2 seul

$$\frac{a}{2\pi^2\left(\frac{a^2}{4\pi^2} + \lambda^2\right)} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-a|t|}$$

On pose alors $a' = \frac{a}{2\pi}$

$$\frac{a'}{\pi\left(a'^2 + \lambda^2\right)} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-2\pi a'|t|}$$

et enfin, grâce à la linéarité de la transformation de Fourier

$$\frac{1}{a'^2 + \lambda^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\pi}{a'} e^{-2\pi a'|t|}$$

On a vu qu'en général $\widehat{f}$ n'était pas une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, donc l'hypothèse faite dans ce théorème est contraignante. Lorsque $\widehat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, l'expression $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) e^{+2i\pi\lambda t} \, d\lambda$ n'a généralement **pas de sens**. Par contre on peut parfois utiliser : $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{+a} \widehat{f}(\lambda) e^{+2i\pi\lambda t} \, d\lambda$ qui est *la valeur principale de l'intégrale au sens de Cauchy.* C'est une façon très particulière de calculer une intégrale : cette quantité peut exister sans que f soit dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et permet d'obtenir des résultats analogues au théorème de Dirichlet pour les séries. Par exemple, on a le théorème utile suivant.

Théorème 2 *Soit f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec de plus f fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{+a} \widehat{f}(\lambda) e^{+2i\pi\lambda t} \, d\lambda = \frac{1}{2}\left[f(t+) + f(t-)\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple : *La fonction* $f(t) = \pi I_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}(t)$ *est une fonction intégrable,* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux avec* $f'(t) = 0$ *p.p. (Pourquoi ?). Sa transformée de Fourier est la fonction* $\widehat{f}(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}$ *qui n'est pas dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. *On ne peut donc pas lui appliquer le théorème d'inversion. Par contre, le théorème précédent nous donne*

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,e^{+2i\pi\lambda t}\,d\lambda = \begin{cases} \pi & \text{si } |t| < \frac{1}{2\pi} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t = \pm\frac{1}{2\pi} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

3.6 Transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

En général, pour une fonction $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, l'intégrale définissant la transformée de Fourier, soit $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2i\pi\lambda t}\,dt$, n'existe pas ! Et pourtant, les fonctions de carré intégrable, correspondant aux signaux d'énergie finie, jouent un grand rôle dans de nombreux problèmes et il est essentiel de pouvoir définir leur transformée de Fourier. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la construction de cette transformée de Fourier pour les fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car elle est un peu délicate. Nous nous contenterons de mentionner ici ses principales propriétés. La formule de Parseval-Plancherel est particulièrement importante : elle correspond à une formule de conservation d'énergie, l'énergie du signal $f(t)$ est la même que son énergie spectrale associée à $\widehat{f}(\lambda)$.

Pour une fonction qui est dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et même si cela peut sembler un peu lourd, on notera différemment la transformée de Fourier de f à savoir $\mathcal{F}(f)$ au lieu de $\widehat{f}$. Il faut retenir que ces deux transformées de Fourier sont définies de façon très différente.

Proposition 4 *On définit une transformée de Fourier* $\mathcal{F}$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \mathcal{F}: & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ & f & \to & \mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

i) $\mathcal{F}$ *est un opérateur linéaire de* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

ii) La formule de Parseval-Plancherel est vraie dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\forall f,g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g}(t)\;dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\lambda)\,\overline{\mathcal{F}(g)}(\lambda)\;d\lambda$$

et

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\;dt = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\lambda)|^2\;d\lambda$$

iii) La propriété d'inversion de la transformée de Fourier est vraie dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, *à savoir*

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{F}^*[\mathcal{F}(f)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^*(f)] = f \quad p.p.$$

($\mathcal{F}^*$ *étant la transformée de Fourier inverse).*

iv) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, *les deux notions de transformée de Fourier coïncident*

$$\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \quad p.p.$$

v) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *alors*

$$\mathcal{F}\left(\widehat{f}\right) = f_\sigma \quad p.p.$$

Voici un exemple simple d'application de ces propriétés. Soit la fonction $f = \mathbb{I}_{[-1,+1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. On sait que $\widehat{f}(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On peut considérer sa transformée de Fourier au sens de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et d'après *v)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right) = f_\sigma = f = \mathbb{I}_{[-1,+1]}$$

De même, il est facile de vérifier que

$$g(t) = \pi\, \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},+\frac{1}{2\pi}\right]}(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\to} \qquad \frac{\sin\lambda}{\lambda} \quad \text{dans } \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

et donc, en considérant la transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right) = \pi\, \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},+\frac{1}{2\pi}\right]}(t)$$

Tableau de Transformées de Fourier.

Fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ($a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$).

$$\Pi_a(t) = \mathbb{I}_{[-a/2,a/2]}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\sin \pi a \lambda}{\pi \lambda}$$

$$T_a(t) = \left(1 - 2\frac{|t|}{a}\right) \Pi_a(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2\sin^2(\pi a \lambda/2)}{\pi^2 a \lambda^2}$$

$$e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{(a+2i\pi\lambda)}$$

$$\frac{t^k}{k!}e^{-at}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{(a+2i\pi\lambda)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$e^{-a|t|} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2\lambda^2}$$

$$e^{-at^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\lambda^2/a}$$

Formules réciproques pour $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\frac{\sin t}{t} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \pi\mathbb{I}_{[-1/2\pi,1/2\pi]}(\lambda)$$

$$\frac{1}{a^2+t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\lambda|}$$

$$\frac{1}{(a+2i\pi t)} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad e^{-a\lambda}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$$

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \pi T_{\frac{2}{\pi}}(\lambda)$$

3.7 Produit de Convolution

Avec la transformée de Fourier et en liaison avec elle, le *produit de convolution* est un outil essentiel pour l'étude des phénomènes physiques. En effet de très nombreux systèmes opérent comme des **filtres**, au sens où un *signal d'entrée* est modifié après passage dans le système. Sous des hypothèses très générales de linéarité et d'invariance dans le temps, le *signal de sortie* s'exprime sous forme d'un **produit de convolution** entre le signal d'entrée et une fonction qui dépend du système étudié.

3.7.1 Définition et existence

Définition 4 *Soient deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle* ***produit de convolution*** *de f et g , noté $f \star g$, la fonction,* ***si elle existe****, définie par*

$$f \star g\,(x) = \int_{\mathbb{R}} f\,(x-t)\;g\,(t)\;dt = \int_{\mathbb{R}} f\,(u)\;g\,(x-u)\;du$$

Exercice : *Calculer le produit de convolution entre $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $g\,(x) = \mu e^{-\mu x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ avec $\lambda \neq \mu$.*

Solution : *On a*

$$f \star g\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-t)\;\mu e^{-\mu t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)\;dt$$

On doit regarder avec soin les fonctions indicatrices $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x-t)$ et $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$ car ce sont elles qui vont conditionner la valeur de l'intégrale. Il faut bien voir que dans ce calcul, la variable x est fixée et on intégre en t. Pour que ces fonctions indicatrices soient non nulles, on doit à la fois avoir

$$t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq t$$

Il est clair que si x est négatif, ces deux conditions sont contradictoires. En d'autres termes, pour $x \leq 0$ on a $f \star g\,(x) = 0$. Pour x positif la condition précédente devient

$$0 \leq t \leq x$$

donc les bornes d'intégration sont 0 et x

$$\begin{aligned} f \star g\,(x) &= \int_0^x \lambda\mu e^{-\lambda(x-t)}\,e^{-\mu t}\,dt = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int_0^x e^{-(\mu-\lambda)t}\,dt \\ &= \lambda\mu e^{-\lambda x}\left[-\frac{e^{-(\mu-\lambda)t}}{(\mu-\lambda)}\right]_0^x = \lambda\mu e^{-\lambda x}\frac{1-e^{-(\mu-\lambda)x}}{(\mu-\lambda)} \\ &= \lambda\mu\,\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\mu x}}{(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

Voici quelques cas importants d'existence du produit de convolution entre f et g.

Proposition 5 *Si f et g sont deux fonctions continues, dont l'une est à support compact, alors $f\star g\,(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons par exemple que le support de g soit contenu dans $[-A, A]$. L'intégrale s'écrit

$$\int_{-A}^{A} f\,(x-t)\ g\,(t)\ dt$$

On intègre donc une fonction continue de t sur un intervalle $[-A, A]$ borné, donc cette intégrale existe, quelque soit x. Si c'est le support de f qui est borné, on utilise l'autre écriture du produit de convolution et on déduit le résultat. ■

Proposition 6 *Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors*

i) $f \star g\,(x)$ est défini ***pour presque tout*** *$x \in \mathbb{R}$.*

ii) la fonction (définie presque partout) $f \star g$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

iii) on a l'inégalité de norme

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$$

Preuve. On admet l'existence de $f \star g\,(x)$. Démontrons les points ii) et iii). Pour démontrer l'intégrabilité de $f \star g\,(x)$, on étudie

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f \star g\,(x)|\ dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f\,(x-t)\ g\,(t)\ dt \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f\,(x-t)|\ |g\,(t)|\ dx\,dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |g\,(t)| \left[\int_{\mathbb{R}} |f\,(x-t)|\ dx \right] dt
\end{aligned}$$

Pour t fixé, le changement de variable $u = x - t$ montre que

$$\int_{\mathbb{R}} |f\,(x-t)|\ dx = \int_{\mathbb{R}} |f\,(u)|\ du = \|f\|_1$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f \star g\,(x)|\ dx \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g\,(t)|\ dt = \|f\|_1\, \|g\|_1$$

ce qui démontre à la fois les points i) et ii). ■

3.7.2 Convolution et Transformée de Fourier

La transformée de Fourier a la propriété remarquable d'échanger la convolution et la multiplication au sens ordinaire, des fonctions. Formellement, et ce qui est à retenir est que

$$\widehat{f \star g}\ (t) = \widehat{f}\,(t)\ \widehat{g}\,(t)$$

et souvent, une formule réciproque

$$\widehat{f\,g}\ (t) = \widehat{f} \star \widehat{g}\ (t)$$

Il faut seulement prendre quelques précautions avec ces formules et savoir dans quels cas elles sont vérifiées. Nous résumons dans la proposition suivante des cas importants d'application de ces formules.

Proposition 7 *i) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors*

$$\widehat{f \star g}\,(t) = \widehat{f}\,(t)\ \widehat{g}\,(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si de plus, on suppose que $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ et $f\,g$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a aussi

$$\widehat{f\,g}\,(t) = \widehat{f} \star \widehat{g}\,(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors on a seulement

$$f \star g\,(t) = \mathcal{F}^*\left[\widehat{f}\ \widehat{g}\right](t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et par contre

$$\widehat{f\,g}\,(t) = \widehat{f} \star \widehat{g}\,(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.7.3 Un exemple d'utilisation

Concluons cette utilisation conjointe de la transformée de Fourier et du produit de convolution, par un exemple. Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec un second membre f (supposée dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$)

$$\boxed{-\frac{1}{\omega^2}\,g'' + g = f}$$

Formellement, si on applique la transformée de Fourier aux deux membres de cette équation, on obtient (*cf.* transformée de Fourier et dérivation)

$$-\frac{1}{\omega^2}\,(2i\pi t)^2\ \widehat{g}\,(t) + \widehat{g}\,(t) = \widehat{f}\,(t)$$

soit encore

$$\widehat{g}\,(t)\left[1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}\right] = \widehat{f}\,(t)$$

Comme la fonction $\left[1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}\right]$ n'a pas de zéro réel, on en déduit

$$\widehat{g}\,(t) = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}}\ \widehat{f}\,(t)$$

En utilisant la table des transformées de Fourier, on vérifie que

$$\frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}} = \widehat{h}\,(t) \qquad \text{avec} \qquad h\,(x) = \frac{1}{2}\omega\, e^{-\omega|x|}$$

Finalement, on peut écrire

$$\widehat{g}\,(t) = \widehat{h}\,(t)\ \widehat{f}\,(t)$$

Comme ici, f et h sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors on a (*cf.* transformée de Fourier et convolution) $\widehat{h}(t).\widehat{f}(t) = \widehat{h \star f}(t)$ et grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier

$$g = h \star f \quad \text{p.p.}$$

ou encore

$$g(x) = \frac{1}{2}\omega \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega|x-t|} f(t)\, dt \quad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}$$

Resteraient à justifier chacune des transformations effectuées précédemment sur l'équation différentielle et à obtenir un résultat plus précis que le " *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$ ", mais ce calcul donne une idée de la forme générale de la solution.