

Troisième semaine de travail : Transformée de Fourier et Convolution

Formulaire de cours

Transformée de Fourier : Définition

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la **transformée de Fourier** de f comme étant la fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Transformée de Fourier : Propriétés

- *Translation* :

Si l'on note $\tau_a(f)(x) = f(x - a)$ ($a \in \mathbb{R}$) la translatée de f , on a

$$(\widehat{\tau_a(f)})(\lambda) = e^{-2i\pi\lambda a} \widehat{f}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ou

$$f(x - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2i\pi\lambda a} \widehat{f}(\lambda)$$

Propriété inverse

$$e^{2i\pi x a} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(\lambda - a)$$

- *Parité* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \text{ paire} & \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \text{ paire} \\ f \text{ impaire} & \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \text{ impaire} \\ f \text{ réelle paire} & \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \text{ réelle (paire)} \\ f \text{ réelle impaire} & \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \text{ imaginaire pure (impaire)} \end{array} \right.$$

Transformée de Fourier : Dérivation

i) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $x^k f(x)$ soit aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour $k = 1, \dots, n$. Alors, la fonction $\widehat{f}(\lambda)$ est n -fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\frac{d}{d\lambda^k} (\widehat{f}(\lambda)) = \widehat{f^{(k)}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x)^k f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc, sous ces hypothèses

$$x^k f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(-2i\pi)^k} \frac{d}{d\lambda^k} (\widehat{f}(\lambda))$$

ii) Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et que $f^{(k)}(\lambda) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, \dots, n$. Alors

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (2i\pi\lambda)^k \widehat{f}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc, sous ces hypothèses

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2i\pi\lambda)^k \widehat{f}(\lambda)$$

Transformée de Fourier : Formule inverse

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons de plus que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors

i)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) e^{+2i\pi\lambda x} d\lambda \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

ou encore, de façon plus condensée

$$f = \overline{(\mathcal{F})}(\widehat{f}) \quad p.p.$$

ii) L'égalité précédente a lieu en **tout point de continuité** de f .

Formule de Parseval-Plancherel

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}}(\lambda) d\lambda$$

si $f = g$

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda$$

Convolution : Définition

Soient deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle **produit de convolution** de f et g , noté $f \star g$, la fonction, **si elle existe**, définie par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) du$$

Convolution et Transformée de Fourier

i) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si de plus, on suppose que $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ et $f \cdot g$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a aussi

$$\widehat{f \cdot g}(t) = \widehat{f} \star \widehat{g}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ii) Si f et g sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, les deux formules précédentes sont vraies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

iii) Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors on a seulement

$$f \star g(t) = \mathcal{F}^*[\widehat{f \cdot g}](t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et par contre

$$\widehat{f \cdot g}(t) = \widehat{f} \star \widehat{g}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$