Deuxième semaine de travail : Calcul Intégral

QCM de cours

Ce QCM sert à vous autoévaluer sur votre assimilation du cours de la semaine 2 sur l'intégration au sens de Lebesgue. Il se compose de questions traitant des formules fondamentales du cours. Elles sont directement liées au cours et ne nécessitent pas de calcul.

1- Lequel de ces trois ensembles est négligeable ?

A - L'intervalle $I = [0,1]$

B - Une réunion infini de points

C - Une réunion infini mais dénombrable de points

2- Lequel de ces trois ensembles **n'est pas négligeable** ?

A - $E = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \cos x = 0\}$

B - $F = \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathbb{I}_{[0,+\infty]}(x) = 0\right\}$

C - $G = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad (x-a)(x-b) = 0\}$

3- Que signifie pour une propriété d'être *vraie presque partout sur un intervalle* I ?

A - qu'elle est vraie sur tout I sauf sur un sous-intervalle de petite taille

B - que l'ensemble des points pour lesquels elle n'est pas vraie est de mesure nulle

C - qu'elle est vraie pour tout les points de l'intervalle sauf un.

4- Soit f une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$. Si $\int_{IR} |f(x)|\, dx = 0$ alors

A - on ne peut rien conclure

B - $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

C - $f(x) = 0$ *p.p.*

5- Soit une fonction f a valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dire que f est intégrable signifie :

A - $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0$

B - $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx < \infty$

C - $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$

6- Qu'est-ce que l'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

A - L'ensemble des fonctions integrables sur $\mathbb{R}$

B - L'ensemble des fonctions de carré integrable sur $\mathbb{R}$

C - L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

7- Soit une fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et g une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Si on a $|f(x)| \leq g(x)$ pp alors on peut conclure que :

A - f est nulle

B - f est intégrable

C - f est positive

8- Soit une suite de fonctions (f_n) dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La suite (f_n) converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ssi

A - $\underset{n\to\infty}{lim} \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))\, dx = 0$

B - $\underset{n\to\infty}{lim} (f_n(x) - f(x)) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

C - $\underset{n\to\infty}{lim} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$

9- Laquelle de ces fonctions n'appartient pas a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

A - $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

B - $f(x) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$

C - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0, +1[$

10- Qu'est-ce que l'ensemble $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

A - L'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$

B - L'ensemble des fonctions de carré integrable sur $\mathbb{R}$

C - L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

11- Soit f et g, deux fonctions appartenant a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors le produit fg appartient a :

A - $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

B - on ne peut rien en dire

C - $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

12- Pour pouvoir appliquer le théorème de la Convergence Dominée, il faut que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge presque partout vers la fonction f et que

A - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, avec $g_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

B - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout x, avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

C - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p, avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

13- Supposons que les deux hypothèses du théorème de la Convergence Dominée sont vérifiées, nous avons alors comme conclusion que la limite f est intégrable et que

A - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

B - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ simplement

C - $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément

Dans ce qui suit, les notations pour une intégrale dépendant d'un paramètre sont celles du cours à savoir :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, dx \quad \forall x \in D_F$$

i.e. on intégre par rapport à la variable x et le paramètre est t.Il doit être bien clair, que ces deux quantités ne jouent pas le même rôle, ce que nous illustrons dans les questions qui suivent.

14- Soit t_0 un point appartenant au domaine de definition, D_F d'une intégrale dépendant d'un paramètre, notée F. Supposons que les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre soient vérifiées, nous avons alors comme conclusion que F est

A - continue en t_0
B - derivable en t_0
C - continue sur D_F

15- Dans le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre la première hypothèse impose que $f\,(t,x)$ soit continue

A - par rapport à x et par rapport à t
B - en x pour presque tout t
C - en t pour presque tout x

16- La première hypothèse du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre en t_0 est que la fonction f soit dérivable par rapport à t_0 pour presque tout x. La deuxième, quant à elle, est :

A - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq g(t) \quad (\text{p.p.t. } t)$
B - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall t \in \,]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\qquad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq g(t) \quad (\text{p.p.t. } t)$
C - $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall t \in \,]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\qquad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x) \quad (\text{p.p.t. } x)$

QCM de cours : correction

Nous donnerons, pour chaque question, la réponse exacte et le passage du cours qui correspond. Lorsque les questions ne seront pas une formule du cours, nous écrirons quelques lignes de justification.

1- C (page 26, paragraphe 2.3)

2- B (page 26, paragraphe 2.3)

Dans la proposition **A**, l'ensemble des points où le cosinus s'annule correspond à $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ce que l'on peut écrire $E = \mathbb{Z}\pi$ qui est dénombrable, donc de mesure nulle. Dans la proposition **C**, nous avons $G = \{a\} \cup \{b\}$. Cet ensemble est donc une réunion finie de singletons (de mesure nulle). G est donc de mesure nulle.

Par contre dans le cas **B**, l'indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$ est nulle en dehors de cet intervalle, donc $F =]-\infty, 0[$. Cet ensemble est de mesure infini donc il n'est pas négligeable.

3- B (page 27, paragraphe 2.3, définition 21)

4- C

5- C (page 21, paragraphe 2.2, définition 8)

6- A (page 22, paragraphe 2.2, définition 8)

7- B (page 22, paragraphe 2.2, proposition 10)

8- C (page 25, paragraphe 2.2, définition 16)

9- A (page 24, paragraphe 2.2)

10- B (page 32, paragraphe 2.5, définition 30)

11- C (page 33, paragraphe 2.5)

12- C (page 29, paragraphe 2.4, théorème 23)

Remarque 1 *A retenir : la fonction majorante ne doit pas dépendre de l'indice n mais uniquement de la variable x. De plus, la relation est p.p.t.x.*

13- A (page 29, paragraphe 2.4, théorème 23)

14- A (page 34, paragraphe 2.6.1, theoreme 33)

15- C (page 34, paragraphe 2.6.1, théorème 33)

16- C (page 34, paragraphe 2.6.2, théorème 34)

Remarque 2 *A retenir : la dérivation s'effectue par rapport à t et la fonction majorante ne dépend que de x.*