

Chapitre 2

Compléments de Calcul Intégral

Dans ce module, on rappelle les propriétés de calcul intégral à connaître absolument pour pouvoir utiliser la transformée de Fourier sans trop de difficultés. On utilisera abondamment les rappels concernant les *intégrales généralisées* (Module 1) donc concernant les intégrales sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Il est notamment indispensable de bien connaître les fonctions intégrables du tableau page 3 de cette partie de module. Une notion nouvelle et importante introduite dans ce chapitre est la notion d'*ensemble négligeable*. C'est une notion qui fournit une grande souplesse d'utilisation de l'intégrale. Nous n'entrons pas dans des considérations savantes, mais nous essaierons de faire comprendre l'idée de la notion. Le Théorème de Convergence Dominée et les Théorèmes de Continuité et de Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre - qui en sont des conséquences - sont d'une utilisation constante et doivent être connus et compris.

2.1 Quelques fonctions intégrables

Résumons brièvement les problèmes d'intégrabilité des fonctions.

Proposition 1 *Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$ et a, b finis) alors la fonction est intégrable sur $[a, b]$. Cette intégrale se note*

$$\int_a^b f(t) dt$$

et elle représente la mesure de l'aire (algébrique) du domaine limité par le graphe de f , l'axe des x et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Enfin si F est une primitive de f sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

On peut voir sur la figure 2.1a) que pour l'intervalle où la fonction est positive, l'intégrale sera positive. Par contre sur l'intervalle où la fonction est négative, l'intégrale est aussi négative. Dans l'exemple de la figure 2.1b), la fonction est toujours positive, donc les deux aires sous la fonction sont positive et l'intégrale est la somme des deux. Cet exemple illustre aussi pourquoi l'intégrale de la valeur absolue d'une fonction est plus grande ou égale à l'intégrale de la fonction.

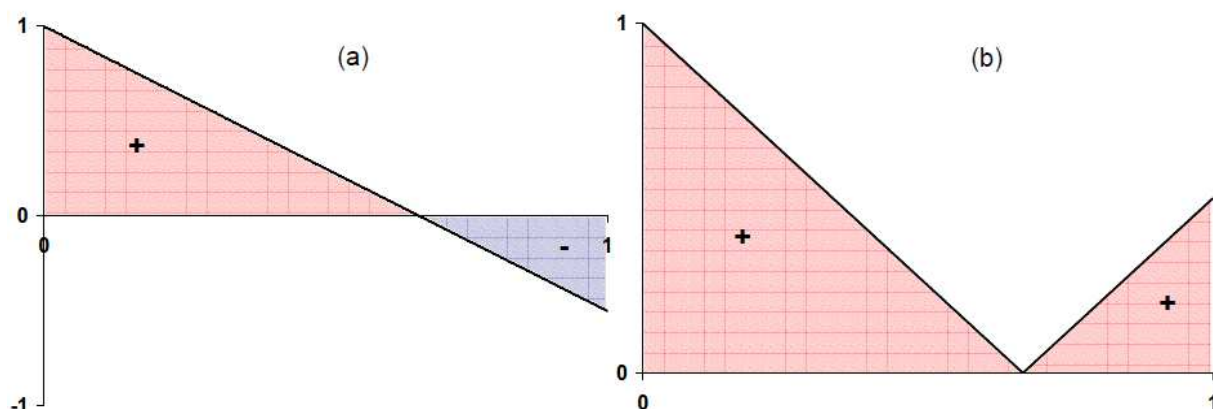


FIG. 2.1 – (a) la fonction $y = 1 - \frac{3}{2}x$ avec une partie positive and une partie négative et (b) la fonction $y = |1 - \frac{3}{2}x|$ positive pour tout x dans $[0, 1]$.

Proposition 2 Si la fonction f est continue par morceaux¹ sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $[a, b]$.

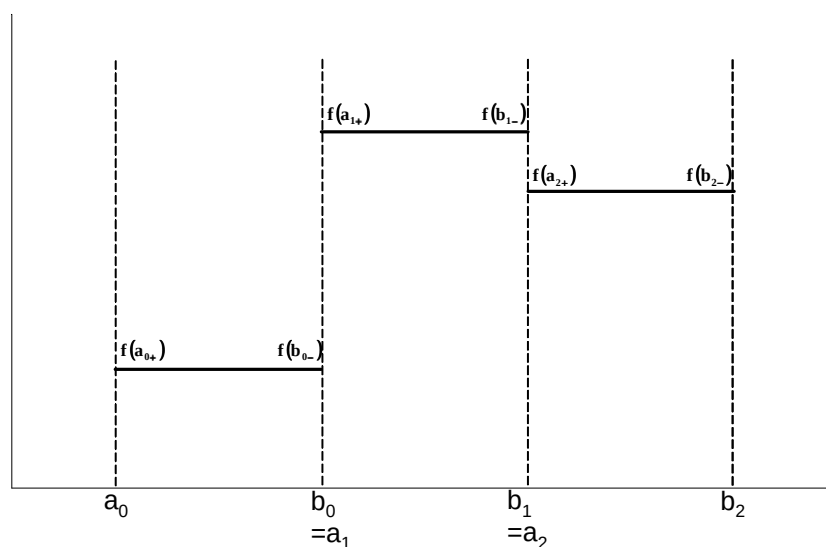


FIG. 2.2 – Exemple d'une fonction continue par morceaux. Cette fonction est constante sur chacun des intervalles de continuité.

On voit que pour ces fonctions, sur chaque intervalle $]a_i, b_i[$ dans lequel f est continue, on peut prolonger f par continuité à droite et à gauche respectivement par $f(b_{i-})$ et $f(a_{i+})$ (valeurs finies et c'est essentiel ici!), on est alors ramené à une fonction continue sur $[a_i, b_i]$. Si F est une primitive de f sur $[a_i, b_i]$, on aura donc

$$\int_{a_i}^{b_i} f(t) dt = F(b_{i-}) - F(a_{i+}).$$

¹Revoir la définition dans le cours semaine 1.

L'intégrale sur $[a, b]$ se décompose en

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f(t) dt$$

Considérons maintenant la fonction

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue dans $[0, 1]$ excepté en $x = 0$, mais elle n'est pas continue par morceaux puisque la limite à droite en $x = 0$ vaut $+\infty$. Alors se pose le problème de son intégrabilité ou non, sur $[0, 1]$ ². Rappelons comment on procède : pour $\epsilon > 0$, on intgre sur $[\epsilon, 1]$ puis on étudie la limite quand ϵ tend vers 0^+ . Ici

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon})$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2$$

On dit alors que la fonction est intégrable sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Remarque 3 Il faut remarquer ici que la valeur $f(0) = 1$ ne joue aucun rôle dans le calcul de la limite précédente, et donc dans le calcul de l'intégrale de f sur $[0, 1]$. En d'autres termes, quelque soit la valeur de $f(0)$ l'intégrale sera la même : on peut donc se permettre de ne pas définir f en $x = 0$.

Si l'on considère la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ si } 0 < x \leq 1$$

(on ne définit pas $g(0)$ suivant en cela, la remarque précédente!) le même calcul de limite montre que

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\epsilon}^1 = \ln 1 - \ln \epsilon = -\ln \epsilon$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \epsilon) = +\infty$$

La fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est **pas intégrable sur** $[0, 1]$.

Résumons ce cas d'intégrabilité dans la proposition suivante, l'intervalle $[0, 1]$ et l'intégrabilité en $x = 0$ n'étant pris qu'à titre d'exemple : c'est le cas où la fonction a une limite infinie (ou éventuellement pas de limite) en un point.

²Il faut bien comprendre ici que cette limite infinie change tout sur le plan de l'intégrabilité!...

Proposition 4 Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ est intégrable sur $[\epsilon, 1]$ $\forall \epsilon > 0$, alors

$$f \text{ est intégrable sur } [0, 1] \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 |f(x)| dx \text{ existe et est finie}$$

et son intégrale vaut

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$$

On dit aussi dans ce cas que f est intégrable en 0 ou intégrable au voisinage de 0. Comme on l'a déjà vu, la valeur de f en $x = 0$, ne joue aucun rôle, c'est uniquement le comportement de f au voisinage de $x = 0$ qui importe.

Remarque 5 Les deux exemples introductifs portaient sur des fonctions positives, donc on n'avait pas pris en considération la valeur absolue. Par contre, pour une fonction de signe quelconque, pour avoir intégrabilité, il faut l'intégrabilité en module, même si l'intégrale est ensuite définie sans module³, soit

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$$

On notera $\mathcal{L}^1([0, 1])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[0, 1]$.

Exercice 6 Est-ce que $h(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $0 < x \leq 1$ appartient à $\mathcal{L}^1([0, 1])$? Même question avec $h(x) = \ln x$ pour $0 < x \leq 1$? (On rappelle que $\ln x$ négatif pour $0 < x \leq 1$ et qu'une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$).

Examinons maintenant un autre cas où l'intégrabilité se pose. On considère la fonction

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{pour } x \geq 1 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On étudie donc l'intégrabilité sur l'intervalle non bornée $[1, +\infty[$ et donc l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

La technique est la même que précédemment. On se place sur $[1, X]$ avec $X > 1$ et on fait tendre X vers l'infini. Soit

$$\int_1^X \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^X = \left(1 - \frac{1}{X} \right)$$

et donc

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{X} \right) = 1$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$ et l'on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Par contre, si on prend

³On admettra que si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 |f(x)| dx$ existe et est finie, alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$ existe aussi et est finie.

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} & \text{pour } x \geq 1 \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} (\ln X) = +\infty$$

et $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

On donne dans ce qui suit la définition générale de l'intégrabilité sur l'intervalle $[1, +\infty[$ quand le seul problème est celui de l'intégrabilité en $+\infty$. Et là encore, on exigera l'intégrabilité en module. Soit

Proposition 7 Soit f une fonction définie, par exemple sur $[1, +\infty[$ t.q. f soit intégrable sur $[1, X]$ $\forall X > 1$. Alors

$$f \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\iff \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X |f(x)| dx \text{ existe et est finie}$$

et alors

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X f(x) dx$$

Pour traduire l'existence de cette limite, on dira parfois en raccourci - comme on le faisait auparavant - que " f est intégrable au voisinage de l' ∞ ".

On notera $\mathcal{L}^1([1, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[1, +\infty[$.

Le point essentiel à retenir concernant ces rappels sur l'intégrabilité, c'est que c'est l'intégrabilité en module (ou encore en valeur absolue) qui est exigée !

2.2 L'espace des fonctions intégrables

On considère ici l'intégrabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, donc l'existence des intégrales du type : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Si une fonction f n'est définie que sur $[0, 1]$ par exemple, en posant

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{pour } x \in [0, 1] \\ \tilde{f}(x) = 0 & \text{pour } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

on a clairement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

et donc l'intégrabilité sur $]-\infty, +\infty[$ contient tous les cas.

Définition 8 Une fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable (ou sommable) ssi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Son intégrale existe et vaut

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

L'ensemble des fonctions intégrables est noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})^4$ ou parfois $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R})$ si l'on veut préciser que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

Exemple 9 La fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

est intégrable. A vérifier.

On a rappelé plus haut quels étaient les problèmes d'intégrabilité que l'on rencontrait le plus fréquemment. Pour résoudre ces problèmes, les principaux outils sont :

1. trouver une fonction équivalente à la fonction donnée, et dont on sait qu'elle est intégrale
2. trouver une majoration en module, de la fonction donnée par une fonction dont on sait qu'elle est intégrale. En effet, on a la proposition suivante.

Proposition 10 Soit une fonction f telle que l'on puisse trouver une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Exemple 11 La fonction définie par $f(x) = e^{-x^2} \sin x$ est intégrable.

En effet, on a $|e^{-x^2} \sin x| \leq e^{-x^2}$ et l'on sait que la fonction e^{-x^2} est intégrable (voir le cours de Maths/Rappel). Il s'agit là d'un moyen fréquent pour montrer qu'une fonction est intégrable : la majorer par une fonction intégrable.

Exemple 12 Considérons la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0, 1]$. C'est une fonction compliquée ! Quand x s'approche de 0, $1/x$ tend vers l'infini, et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille constamment entre -1 et $+1$. En d'autres termes cette fonction n'a pas de limite quand x tend vers 0 par valeurs positives. L'étude directe, comme précédemment, de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx$$

n'est pas commode du tout. Par contre, on a clairement

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \quad \text{pour tout } x \text{ dans }]0, 1]$$

⁴Le symbole $\mathcal{L}$ fait référence à l'intégrale de Lebesgue qui le cadre dans le quel nous travaillons.

la fonction $g(x) = 1$ est intégrable sur $[0, 1]$ et donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ aussi, soit $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. On en déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

existe⁵.

Remarque 13 La définition de l'intégrabilité i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ portant sur le module est essentielle pour que la proposition (10) soit vraie.

Etudions l'intégrabilité de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $[0, +\infty[$ (on ne définit pas $f(0)$). On doit étudier

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

On a apparemment deux problèmes de convergence pour l'intégrale : en $x = 0$ et au voisinage de l'infini. L'existence de la limite

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et donc de

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

montre qu'il n'y a pas de problème en 0. On peut prolonger par continuité $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ en $x = 0$ en prenant $|f(0)| = 1$ et alors l'intégrale

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \text{ est définie}$$

Etudions alors⁶ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

Comme $|\sin x| \leq 1$ on a $|\sin x| \geq (\sin x)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Ainsi pour $X > 1$

$$\int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_1^X \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \int_1^X \frac{1}{2x} dx - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx$$

On a

$$\int_1^X \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln X \rightarrow \infty \text{ quand } X \rightarrow \infty$$

Pour le second terme $\int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx$ on fait une intégration par parties

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

⁵Pour la valeur de ce type d'intégrale, soit on consulte des ouvrages (fascinants!..) donnant l'expression d'intégrales très complexes, soit on a recours à des méthodes numériques.

⁶On rappelle que la valeur de la borne inférieure, ici 1, est arbitraire et ne joue pas de rôle fondamental.

alors :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx &= \left[\frac{\sin 2x}{2x} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin 2x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 2X}{2X} + \int_1^X \frac{\sin 2x}{x^2} dx\end{aligned}$$

$\frac{\sin 2X}{2X} \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$ et la majoration $\left| \frac{\sin 2x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ existe puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{dx}{x^2}$ existe. Finalement

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx \text{ est finie}$$

En réunissant ces deux études de limite, on en conclut que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{1}{2x} dx - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{\cos 2x}{x} dx = +\infty$$

Comme la quantité $\int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ est **minorée** par ce terme qui tend vers l'infini, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$! Par contre, si on fait le même calcul sans la valeur absolue, on a pour les mêmes raisons que précédemment

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ est définie}$$

Et le calcul de la seconde limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{x} dx$$

se fait par une intégration par parties similaire

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \sin x \cdot dx & v = -\cos x \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin x}{x} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx\end{aligned}$$

$\frac{\cos x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et la majoration $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx$ existe.

Finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{x} dx$ existe et aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx$ existe également.⁷

En conclusion

$$\begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty \text{ et } \frac{\sin x}{x} \text{ n'appartient pas } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+) \\ \text{mais } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

⁷ On montre par d'autres techniques que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 14 C'est ce que l'on appelait autrefois de façon imagée, les intégrales **semi-convergentes**.

Le point important à retenir ici, est que puisque $\frac{\sin x}{x}$ n'appartient pas $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$, **cette fonction ne possèdera pas les propriétés démontrées pour les fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$** , et ceci même si on a par ailleurs : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}!$

On résume dans la proposition suivante, les principales propriétés des fonctions intégrables.

Proposition 15 *i) L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) et l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

est linéaire.

ii) Pour f et g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$$

En particulier si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec $f \geq 0$. on a

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

iii) On a

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

Lorsque l'on travaille dans un espace de fonctions comme ici, il est important de **normer** les fonctions (revoir la notion de norme dans les Maths rappels). L'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est muni d'une norme

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

La convergence pour cette norme, est appelée la *convergence en moyenne*.

Définition 16 Soit une suite $\{f_n\}_n$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors f_n converge vers f en moyenne ou encore dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ssi

$$\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Ceci résulte simplement de la majoration

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx$$

Si ce dernier terme tend vers 0, on a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right| = 0$ ce qui traduit $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Exercice 17 Soit la suite de fonctions $f_n(t) = e^{-nt}$. Vérifier que la suite $\{f_n(t)\}_n$ converge en moyenne vers la fonction $f = 0$ dans $\mathcal{L}^1([0, 1])$?

Preuve. Il s'agit simplement de vérifier que $\|f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Or on a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 e^{-nt} dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-n}}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

■

2.3 La notion d'ensemble négligeable

Il s'agit là d'une notion essentielle en intégration, due à Lebesgue et qui donne beaucoup de souplesse pour pouvoir intégrer des fonctions compliquées. On ne donne que l'idée générale, sans entrer dans des écritures trop techniques.

1. On imagine volontiers que si l'on modifie la définition d'une fonction sur un point x_0 cela ne change en rien l'intégrale : un ensemble réduit à un point $\{x_0\}$ est un **ensemble négligeable**.
2. Si on modifie la définition d'une fonction sur un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ de la même façon, ceci ne modifie pas le calcul de l'intégrale. Un ensemble fini de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ est **négligeable**.
3. Peut être un plus surprenant ... mais pas tant que celà, si l'on modifie la définition d'une fonction sur un ensemble infini dénombrable (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) de points, l'intégrale n'est pas changée. Rappelons qu'un ensemble infini dénombrable est un ensemble que l'on peut indexer par des entiers

$$D = \{x_n \in \mathbb{R} \quad / \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Les ensemble dénombrables de points sont **négligeables**.

Remarque 18 Par contre l'ensemble de tous les réels de $[0, 1]$ est un ensemble infini beaucoup plus gros, il est impossible d'indexer par des entiers tous les réels de $[0, 1]$: il est infini non dénombrable.

A quoi sert cette notion d'ensembles négligeables ?

L'idée à retenir est la suivante : en intégration, les valeurs d'une fonction sur un ensemble négligeable importent peu pour le calcul de son intégrale.

Exemple 19 Soit la fonction $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ qui est intégrable avec $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. La fonction obtenue à partir de f en posant

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ \tilde{f}(n) = n & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est intégrable et de même intégrale. On a modifié f sur l'ensemble négligeable $\mathbb{N}$, l'intégrale n'est pas modifiée.

Quelle est l'intérêt de cette notion ?

Très souvent lorsque l'on étudie l'intégrabilité d'une limite de suite de fonctions, apparaît un ensemble de points pour lesquels la limite n'existe pas ou vaut l'infini. Sous réserve que cet ensemble soit dénombrable, il ne posera pas de problème pour l'intégration : **on peut en quelque sorte l'oublier !**

Exemple 20 Soit la suite de fonctions : $h_n(x) = [1 - (\cos(x))^n] e^{-x^2}$. Il est facile de voir (à vérifier) que

$$\begin{cases} h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x^2} & \text{si } x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 & \text{si } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ h_n(x) \text{ ne converge pas} & \text{si } x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Indication : Ces trois cas correspondent à $|\cos x| < 1$ et donc $(\cos(x))^n \rightarrow 0$, $\cos x = 1$ donc $h_n(x) = 0$ et $\cos x = -1$ et $h_n(x) = [1 - (-1)^n] e^{-x^2}$ est une suite alternée.

Si l'on pose : $h(x) = \lim_n h_n(x)$, on peut résumer ce qui précède par

$$\begin{cases} h(x) = e^{-x^2} & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ avec } x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ h(x) = 0 & \text{pour } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ h(x) \text{ n'existe pas} & \text{pour } x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'intégrabilité de h semble complexe à cause des points $x = 2k\pi$ et $x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

Mais en dehors de l'ensemble négligeable (car indexé par des entiers)

$$D = \{x_n = n\pi \quad / \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

la fonction limite est la fonction $h(x) = e^{-x^2}$ qui est intégrable.

On formalise ces notions de la façon suivante.

Définition 21 Une propriété $\mathcal{P}$ portant sur les x de $\mathbb{R}$ est dite vraie **presque partout** si l'ensemble

$$E = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad \mathcal{P}(x) \text{ fausse}\}$$

est négligeable. On écrira alors $\mathcal{P}(x)$ est vraie p.p. ou aussi $\mathcal{P}(x)$ est vraie p.p.t x (pour presque tout x).

Dire que deux fonctions f et g vérifient $f = g$ p.p. signifie donc que

$$E = \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable. Alors f et g se comporteront de la même façon pour l'intégrale et on aura

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

Exemple 22 La suite de fonctions $\{f_n\}_n$ converge presque partout vers f ssi

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x) \right\} \quad \text{est négligeable.}$$

On peut dire de façon équivalente que $f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf sur un ensemble négligeable.

Ainsi dans l'exemple de la suite $\{h_n\}_n$ traité plus haut, on écrira $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x^2}$ p.p. ou encore

$$h(x) = e^{-x^2} \quad \text{p.p.}$$

La fonction limite $h(x)$ se comportera, vis à vis de l'intégration, comme la fonction e^{-x^2} .

Dans ce qui suit, les énoncés seront toujours agrémentés de la notation "p.p." qui autorise à exclure des points problématiques tant qu'ils ne constituent qu'un ensemble négligeable !

2.4 Le Théorème de Convergence Dominée

Une question centrale dans le calcul intégral est la suivante : peut-on intervertir passage à la limite et intégration, en d'autres termes, a-t-on

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x) dx \quad ?$$

Ou pour une série de fonctions, a-t-on

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \right] = \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right] dx \quad ?$$

La réponse est NON en général. Voici un exemple simple (on fera les calculs, c'est un très bon exercice). On considère la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$

et on étudie

$$\lim_n \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_n \left[\frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \right] dx \quad \text{d'autre part}$$

1. Le changement de variable : $u = x^2$ permet d'obtenir

$$I_n = \lim_n \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} dx = \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n}$$

En écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + n2^n)}{2n} &= \frac{1}{2n} \ln \left[n2^n \left(\frac{1}{n2^n} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[\ln n + n \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n2^n} \right) \right] \end{aligned}$$

puis en utilisant que $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et que $\ln(1 + h)$ est équivalent à h pour h voisin de 0, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\ln 2}{2}$$

2. Maintenant étudions $\lim_n \left[\frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \right]$. Traitons à part le cas $x = 0$. $f_n(0) = 0$, donc $\lim_n f_n(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, en utilisant des équivalents

$$f_n(x) \approx_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n x}{n2^n x^2} = \frac{1}{nx}$$

(on voit ici pourquoi on a mis à part le cas $x = 0$!) et $\frac{1}{nx} \rightarrow 0$ pour x fixé et n tendant vers l'infini. Finalement

$$\lim_n \left[\frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \right] = 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

et

$$\int_0^1 \lim_n \left[\frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \right] dx = 0.$$

On adonc ici

$$\lim_n \int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} dx \neq \int_0^1 \lim_n \left[\frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \right] dx$$

Le but du Théorème qui suit est de fournir des **conditions suffisantes** qui permettent d'affirmer sans calcul (car le calcul précédent n'est pas toujours faisable) si on a égalité des limites. Le Théorème de Convergence Dominée est le résultat essentiel, à **connaître absolument**. On énonce ce théorème pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23 Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Supposons que

- i) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ p.p.
- ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $|f_n| \leq g$ p.p. et pour tout n .

Alors

- 1) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
- 2) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \in \mathbb{R}$$

Convergence simple de la suite + domination uniforme par une même fonction intégrable impliquent convergence dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Comme on l'a indiqué en début de paragraphe, c'est souvent le résultat d'interversion des limites et intégrales qui est utilisé.

Exemple 24 Considérons la suite $f_n(x) = e^{-nx^2} \cos(nx)$ pour $x \in [0, 1]$. On a

$$|f_n(x)| \leq e^{-nx^2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

et pour $x \neq 0$

$$f_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 1 \quad \forall n$ et donc $f_n(0) \rightarrow 1$ quand n tend vers l'infini. Mais un point est négligeable, donc on peut écrire

$$f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.p.}$$

Maintenant, on a aussi

$$|f_n(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1]$$

La fonction $g(x) = 1$ est intégrable sur $[0, 1]$, on en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx^2} \cos(nx) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-nx^2} \cos(nx)) dx = 0$$

Exemple 25 (Plus difficile). Soit la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{3/2}x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Etudier la convergence simple de la suite, vérifier que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in [0, 1]$ et en déduire la limite de $\int_0^1 f_n(x) dx$ quand n tend vers l'infini.

Solution 26 Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 0 \quad \forall n$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Pour tout $0 < x \leq 1$ fixé, on a pour n assez grand : $x \in [1/n, 1]$ et donc, (pour n assez grand) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et la fonction limite est la fonction $f(x)$ qui vaut 0 en $x = 0$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $0 < x \leq 1$. On peut écrire plus simplement : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad p.p.$

La majoration de $f_n(x)$ est évidente sur l'intervalle $[1/n, 1]$. D'autre part, pour $0 \leq x \leq 1/n$ on a $x\sqrt{x} \leq 1/n\sqrt{n} = 1/n^{3/2}$ c'est à dire $n^{3/2}x \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Comme la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0, 1]$ on peut appliquer le Théorème de Convergence Dominée et écrire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$$

Donnons une extension de ce théorème au travers d'un exemple simple. Soit h un paramètre positif ($h \geq 0$) et considérons la fonction de h

$$F(h) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ht}}{1+t^2} dt$$

Il est facile de voir que pour tout $h \geq 0$ la fonction : $t \rightarrow \frac{e^{-ht}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ grâce à la majoration $\left| \frac{e^{-ht}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ cette dernière fonction étant intégrable. Si l'on veut calculer la limite de F quand h tend vers 0^+ , on est tenté d'écrire

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(h) = \int_0^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-ht}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour justifier le passage de la limite à l'intérieur de l'intégrale, on utilise un argument de type convergence dominée, même si dans ce cas là, on n'a pas de suite. La limite en n est remplacée par la limite en h et les deux conditions à vérifier sont du même type à savoir convergence de la famille de fonctions et majoration des éléments de la famille, par une même fonction intégrable. Plus précisément :

1. $\frac{e^{-ht}}{1+t^2} \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ quand $h \rightarrow 0^+$ quelque soit $t \in [0, +\infty[$

2. on a la majoration $\left| \frac{e^{-ht}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ quelque soit $h \geq 0$. La fonction $\frac{1}{1+t^2} = g(t)$ peut jouer le rôle de la fonction intégrable qui majore toute la famille des fonctions $\frac{e^{-ht}}{1+t^2}$. Sous ces deux conditions, l'interversion limite et intégrale est justifiée et le résultat précédent est vrai.

Le Théorème de Convergence Dominée s'applique également aux séries de fonctions. Rappelons que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions, étudier la série $\sum_n f_n(x)$ c'est étudier la suite des sommes partielles : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Une application directe du Théorème de Convergence Dominée énoncera :

- i) si $S_n(x) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} S(x)$ p.p. c'est à dire si $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ existe p.p.
 ii) et si $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $|S_n| \leq g$ p.p. et pour tout n .
 alors $S \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, avec $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et en particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} S_n(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) dx$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

Par la linéarité de l'intégrale, le premier terme s'écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

ce qui est écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

Un résultat (que l'on admettra) souvent plus utile pour les séries est le suivant.

Proposition 27 Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions telle que la série suivante soit convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_k(x)| dx \right) < \infty$$

alors $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ est une série absolument convergente presque partout, définit une fonction intégrable et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

Exercice 28 Utiliser ce résultat pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (= \frac{\pi^2}{6})$$

Solution 29 (*Indication de solution*) Typiquement, il s'agit tout d'abord de décomposer la fonction à intégrer en séries. On écrit

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

On rappelle que

$$\frac{1}{1 - u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \quad \text{pour } |u| < 1$$

Alors

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(n+1)x}$$

On applique enfin le résultat énoncé à la suite $f_n(x) = xe^{-(n+1)x}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

est un résultat connu.

2.5 L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

L'espace des fonctions de carré intégrable est déjà apparu dans l'étude des séries de Fourier. En terme de signal, il modélise les *signaux d'énergie finie* d'où son importance.

Définition 30 On définit l'ensemble des fonctions de carré intégrable ou encore d'énergie finie par

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{t.q.} \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

et

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{t.q.} \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) muni du produit scalaire (resp. hermitien)

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

(resp.

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) \quad)$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$$

Remarque 31 Pour que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$ existe, il faut que la fonction $f(x) g(x)$ soit dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) g(x)| dx < \infty$$

Effectivement, on a le résultat suivant.

Pour f et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ alors le produit fg est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

La démonstration repose sur l'inégalité utile suivante :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq 1/2 (a^2 + b^2)}$$

qui résulte de $(|b| - |a|)^2 \geq 0$. On en déduit $|f(x)g(x)| \leq 1/2 (|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ et en passant à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| \, dx \leq 1/2 \int_{\mathbb{R}} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \, dx < \infty \quad \text{pour } f \text{ et } g \text{ dans } \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Attention. Le produit de deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ n'est pas dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en général, de même d'ailleurs que le produit de deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ n'est pas (en général) dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$! Réfléchir à des contre-exemples simples.

Rappelons que le produit scalaire (cf. Module d'Algèbre) possède la propriété de Cauchy-Schwarz.

Proposition 32 Si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

ce qui s'écrit

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Si l'on applique ce résultat à $|f|$ et $|g|$ on en déduit l'inégalité souvent plus utile

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

2.6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, borné ou non, et

$$\begin{aligned} f :]a, b[\times \mathbb{R} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\} \\ (t, x) &\rightarrow f(t, x) \end{aligned}$$

On suppose que pour tout $t \in]a, b[$, l'application $x \rightarrow f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut définir l'intégrale suivante, qui dépend du paramètre t

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) \, dx \quad \forall t \in]a, b[$$

dite *intégrale dépendant d'un paramètre*. Le paramètre ici est t et la variable d'intégration est x .

On a souvent besoin de savoir si la continuité de $t \rightarrow f(t, x)$ en t_0 se transmet à F et de même si la dérivabilité en t_0 de cette même fonction passe à F avec la possibilité de dériver sous le signe $\int$ à savoir

$$F'(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(t_0, x)}{\partial t} \, dx$$

Par exemple, on verra plus loin que la Transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est donnée par la formule

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On intègre en t , on a un paramètre λ qui représente les fréquences. On est dans le cas d'une intégrale dépendant d'un paramètre, et les propriétés que l'on va examiner ici, ont pour but en grande partie - mais pas uniquement - d'obtenir les propriétés fondamentales des transformées de Fourier.

On donne dans ce qui suit des conditions suffisantes pour avoir ces propriétés, conditions qui sont des *conditions de domination* tout à fait analogues à celles du Théorème de Convergence Dominée.

2.6.1 Théorème de continuité

Théorème 33 Soit $t_0 \in]a, b[$. Si

- i) l'application $t \rightarrow f(t, x)$ est continue en t_0 p.p.t. x
- ii) $\exists \epsilon > 0$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset]a, b[$ et que

$$\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\quad |f(t, x)| \leq g(x) \quad (p.p.t. x)$$

Alors F est continue en t_0 .

Lorsque l'on étudie la continuité de F en t_0 on doit essayer de majorer la fonction $f(t, x)$ par une fonction intégrable au voisinage de t_0 . Pour la dérivabilité, la condition de majoration va porter sur la dérivée.

2.6.2 Théorème de dérivabilité

Théorème 34 Soit $t_0 \in]a, b[$. S'il existe $\epsilon > 0$ t.q.

- i) $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset]a, b[$ et f dérivable dans $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ (p.p.t. x)
- ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\quad \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq g(x)$ (p.p.t. x)

Alors F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t, x) dx \right]_{t=t_0} = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial f(t_0, x)}{\partial t} \right] dx$$

"dérivation sous le signe somme".

A titre d'illustration, nous allons étudier la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Soit une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a vu que

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ la fonction $x \rightarrow e^{-2i\pi\lambda x} f(x)$ est intégrable, grâce à la majoration

$$\left| e^{-2i\pi\lambda x} f(x) \right| \leq |f(x)|$$

et donc $\widehat{f}(\lambda)$ est parfaitement définie pour tout λ . D'autre part, pour tout x fixé, la fonction $\lambda \longrightarrow e^{-2i\pi\lambda x} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente $|e^{-2i\pi\lambda x} f(x)| \leq |f(x)|$ valable pour tout λ , prouve, grâce au théorème de continuité que l'application $\lambda \longrightarrow \widehat{f}(\lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous sommes là dans le cas, où la même fonction majorante convient pour toutes les valeurs du paramètre. Le résultat obtenu est le suivant :

La transformée de Fourier de toute fonction intégrable est une fonction continue.

En ce qui concerne la dérivabilité de $\widehat{f}(\lambda)$, on commence par calculer

$$\frac{\partial e^{-2i\pi\lambda x} f(x)}{\partial \lambda} = (-2i\pi x) e^{-2i\pi\lambda x} f(x)$$

Le module est alors $|(-2i\pi x) e^{-2i\pi\lambda x} f(x)| = 2\pi |x| |f(x)|$. Si la fonction $x \longrightarrow x f(x)$ est intégrable, la fonction $2\pi |x| |f(x)|$ l'est aussi, on peut appliquer le théorème de dérivation et en déduire que l'application $\lambda \longrightarrow \widehat{f}(\lambda)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{d\widehat{f}(\lambda)}{d\lambda} = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x) e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

Si l'on veut étudier la *dérivée seconde* de $\lambda \longrightarrow \widehat{f}(\lambda)$, il est facile de voir (à écrire?) que le même raisonnement, conduit à la condition suffisante : $x \longrightarrow x^2 f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et alors

$$\frac{d^2 \widehat{f}(\lambda)}{d\lambda^2} = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x)^2 e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

Nous y reviendrons dans la leçon suivante.

Exercice 35 On considère la fonction $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$. Vérifier que la fonction $x \longrightarrow e^{-tx} \frac{\sin x}{x}$ est intégrable pour tout $t > 0$.

Montrer que $F(t)$ est dérivable pour tout $t > 0$ et que

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

et en déduire que $F(t) = -\text{Arctan } t + \frac{\pi}{2}$

Solution 36 – Pour $t > 0$ choisissons a tel que $0 < a < t$. On a la majoration

$$\left| e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-ax} \quad \forall x > 0 \quad \text{car} \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$$

et la fonction $x \longrightarrow e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, pour $t = 0$ la fonction $x \longrightarrow \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable. Soit maintenant $t_0 > 0$ et prenons $\epsilon > 0$ de sorte que $0 < t_0 - \epsilon < t_0 < t_0 + \epsilon$. La dérivée partielle se calcule facilement

$$\frac{\partial \left(e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right)}{\partial t} = -e^{-tx} \sin x$$

Alors pour $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ c'est à dire $t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon$ on a $|e^{-tx} \sin x| \leq e^{-(t_0 - \epsilon)x}$ et la fonction $x \rightarrow e^{-(t_0 - \epsilon)x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$. Le théorème de dérivabilité s'applique, F est dérivable pour tout $t > 0$ et l'on a

$$F'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

On calcule facilement cette intégrale, en écrivant

$$F'(t) = -\mathcal{I}m \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{ix} dx = -\mathcal{I}m \int_0^{+\infty} e^{x(-t+i)} dx = -\mathcal{I}m \left[\frac{1}{-t+i} e^{x(-t+i)} \right]_0^{+\infty} = -\mathcal{I}m \left[-\frac{1}{-t+i} \right]$$

En effet, la limite en $+\infty$ résulte de $|e^{x(-t+i)}| = e^{-xt}$ qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini pour $t > 0$. En multipliant le dénominateur par le complexe conjugué, on a

$$\mathcal{I}m \left[\frac{1}{-t+i} \right] = \mathcal{I}m \left[\frac{-t-i}{t^2+1} \right] = -\frac{1}{t^2+1}$$

On en déduit que

$$F(t) = -\text{Arctan } t + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la valeur de cette constante, faisons tendre t vers l'infini ($t = 0$ n'est pas autorisé). Pour passer à la limite dans l'intégrale, on a recours au théorème de convergence dominée ou plus exactement à son extension déjà mentionnée.

- la fonction $e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ quand t tend vers l'infini (pour tout $x > 0$)
- on a la majoration $|e^{-tx} \frac{\sin x}{x}| \leq e^{-x}$ pour tout $t \geq 1$ (comme on fait tendre t vers l'infini, on peut se limiter à $t \geq 1$ sans inconvénient). Cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on peut passer à la limite dans l'intégrale, et l'on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = 0$$

L'expression précédente donnait : $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = -\frac{\pi}{2} + C$, on en déduit $C = \frac{\pi}{2}$. Donc finalement

$$F(t) = -\text{Arctan } t + \frac{\pi}{2} \quad \forall t > 0.$$