Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Formulaire de cours

Espace de fonctions

Espace des fonctions intégrables $\mathcal{L}^1$: Une fonction f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable (ou sommable) ssi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx < \infty$$

L'ensemble des fonctions intégrables est noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou parfois $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ si l'on veut préciser que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Espace de fonctions de carré intégrable $\mathcal{L}^2$: On définit l'ensemble des fonctions de carré intégrable ou encore d'*énergie finie* par

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ f :\ \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx < \infty \right\}$$

Ensemble négligeable

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont négligeables dans $\mathbb{R}$ et plus généralement tout ensemble dénombrable D est négligeable.

Théorème de convergence dominée

Soit $\{f_n\}_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Supposons que

i) $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ p.p.

ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $|f_n| \leq g$ p.p. et pour tout n.

Alors

1) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

2) $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et en particulier

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \ \in \mathbb{R}$$

"Convergence simple de la suite + domination uniforme par une fonction intégrable impliquent convergence dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$" *et possibilité d'intervertir limite et intégrale.*

Intégrale dépendant d'un paramètre, définition :

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, borné ou non, et

$$f: \begin{array}{ccc}]a,b[\times\mathbb{R} & \rightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ (t,x) & \rightarrow & f(t,x) \end{array}$$

On suppose que pour tout $t \in\,]a,b[$, l'application : $x \rightarrow f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut définir l'intégrale suivante, qui dépend du paramètre t

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx \qquad \forall t \in\,]a,b[$$

Intégrale dépendant d'un paramètre, théorème de continuité :
Soit $t_0 \in\,]a,b[$. Si

i) l'application : $t \rightarrow f(t,x)$ est continue en t_0

ii) $\exists \epsilon > 0$ t.q. $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\, \subset\,]a,b[$, et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant la *majoration locale* autour de t_0

$$\forall t \in\,]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\qquad |f(t,x)| \leq g(x)$$

Alors F est continue en t_0.

Intégrale dépendant d'un paramètre, théorème de dérivation :
Soit $t_0 \in\,]a,b[$. Si il existe $\epsilon > 0$ t.q.

i) $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\, \subset\,]a,b[$ et f dérivable dans $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[$

ii) $\exists\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q.

$$\forall t \in\,]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\qquad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$$

Alors F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\,dx\right]_{t=t_0} = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial f(t_0,x)}{\partial t}\right] dx$$

"dérivation sous le signe somme".