

Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Exercice "Type 3" devoir.

Correction exercice 1 On étudie les limites, quand n tend vers l'infini, des deux suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 n^2 x^2 e^{-n^2 x^2} dx$$

et

$$J_n = \int_0^1 n^2 x e^{-n^2 x^2} dx$$

On pose $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}$ et $g_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$.

1. Vérifier que $f_n(x)$ et que $g_n(x)$ tendent vers 0 partout.

Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = g_n(0)$ pour tout n donc la limite est nulle. Pour $x \neq 0$, on a $n^2 x^2$ qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, donc $e^{-n^2 x^2}$ tend vers 0. D'autre part $n^2 x$ et $n^2 x^2$ tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini : apparemment c'est une forme indéterminée, mais on sait que l'exponentielle l'emporte sur la puissance et donc c'est le terme $e^{-n^2 x^2}$ qui donne la limite. On a $f_n(x)$ et que $g_n(x)$ qui tendent vers 0 partout

Commentaire. Les deux suites $\{f_n(x)\}_n$ et que $\{g_n(x)\}_n$ se ressemblent beaucoup, tendent toutes les deux vers 0 quand n tend vers l'infini, mais on va voir que le comportement des intégrales n'est pas le même.

2. Vérifier que

$$|f_n(x)| \leq 1/e \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Une majoration directe grâce à des majorations usuelles, n'est pas évidente ici. Comme on l'a rappelé dans les notes sur les majorations, on peut toujours recourir à l'étude du tableau de variation. On a :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n^2 \left[x^2 e^{-n^2 x^2} \right] \\ f'_n(x) &= n^2 \left[2x - 2n^2 x^3 \right] e^{-n^2 x^2} \\ &= 2xn^2 \left[1 - n^2 x^2 \right] e^{-n^2 x^2} \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule dans l'intervalle $[0, 1]$ pour les valeurs $x = 0$ et $x = 1/n$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$1/n$		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$n^2 e^{-n^2}$
$f'_n(x)$	0	+	0	-	

Sur ce tableau il apparaît très clairement que

$$|f_n(x)| \leq 1/e \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1]$$

3. En déduire par Convergence Dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

La fonction constante : $f(x) = 1/e \ \forall x \in [0, 1]$ est intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$. On a donc bien *domination* de tous les éléments de la suite $\{f_n(x)\}_n$ par une même fonction intégrable $f(x)$. Le théorème de convergence dominée peut s'appliquer d'où la conclusion.

4. Calculer J_n par un changement de variables, et vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1/2$$

Si on étudie le tableau de variation pour $g_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$, on s'aperçoit que le maximum est obtenu pour $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ et que $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$ et donc un argument similaire ne peut être utilisé. On peut ici faire un calcul direct de l'intégrale. On fait le changement de variable : $u = nx$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 n^2 x e^{-n^2 x^2} dx &= \int_0^n n u e^{-u^2} \frac{du}{n} = \int_0^n u e^{-u^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-u^2} \right]_0^n = \frac{1}{2} [1 - e^{-n^2}] \end{aligned}$$

quantité qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini.

Commentaire. Le passage à la limite sous l'intégrale était valide pour $f_n(x)$ mais pas pour $g_n(x)$!

QCM

1- Le problème que nous devons résoudre fait intervenir une limite et le signe intégrale. Il est évident que pour trouver la limite, il est nécessaire d'intervertir limite et intégrale. Afin de pouvoir faire cela, notre premier réflexe est d'essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée. Nous devons donc réaliser deux étapes : la recherche de la limite de la suite de fonctions et trouver un majorant du module de ces fonctions. Posons

$$f_n(x) = \frac{(\cos x)^n}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Commençons par la limite. Cela revient à étudier la convergence de la fonction $(\cos x)^n$. Si $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, alors nous avons $|\cos x| < 1$ et donc $(\cos x)^n \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. Soit $f_n \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$.

Si $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, alors $\cos x = 1$ et $f_n(2k\pi) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$, alors $\cos x = -1$ et $f_n((2k+1)\pi) = \frac{(-1)^n}{1+x^2}$, or dans ce cas f_n ne converge pas quand $n \rightarrow +\infty$.

En conclusion, nous avons

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ p.p.t.x}$$

Cherchons à majorer le module des f_n . $\forall x \in [0, +\infty[$, $|\cos x| \leq 1$, donc nous pouvons majorer $|f_n|$ par

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

g est la dérivée de la fonction $\text{Arctan}x$, elle donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'application du théorème de convergence dominée, nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)(x) dx = 0$$

La bonne réponse est donc la **B**.

2- C'est encore une application de la convergence dominée. Cherchons d'abord la limite de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n(x) = \left(\sin \frac{1}{x} \right)^n$$

On a $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1$ sauf pour $\frac{1}{x} = k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et k impair soit $x = \frac{2}{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et impair. En ces points, nous avons $\left| \sin \frac{1}{x} \right| = 1$. Mais cet ensemble étant comparable à $\mathbb{N}$, il est *dénombrable* donc de mesure nulle. C'est donc un ensemble *négligeable*. On peut écrire que

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^n \rightarrow 0 \quad p.p. \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Il nous reste à trouver un majorant du module des fonctions. Dans ce cas où nous intégrons sur un intervalle borné, la majoration par une fonction intégrable est immédiate car

$$\left| \left(\sin \frac{1}{x} \right)^n \right| \leq 1 \quad \forall n$$

Le théorème de convergence dominée s'applique et nous pouvons donc intervertir la limite et l'intégrale. Nous obtenons finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

La bonne réponse est donc la **A**.