Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Exercices "Type 2" entièrement corrigés.

Correction de l'exercice 1

La démarche à mettre en oeuvre est la suivante :

- Etude de la convergence de la suite de fonctions ;
- Si la convergence est simple, on essaie d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Cherchons dans un premier temps la limite, quand n tend vers l'infini de la suite de fonction (f_n). Nous avons :

si $x = \frac{\pi}{2}$ $\cos x = 0$ ce qui donne $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\cos x > 0$ donc $f_n(x) \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$

Les fonctions f_n sont continues, quelque soit n, et convergent lorsque n tend l'infini vers une limite qui est discontinue. Or dans le cas de la convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) vers f, la continuité des fonctions f_n est conservée par passage à la limite. Donc si la continuité n'est pas conservé cela implique que la convergence n'est pas uniforme. Nous avons donc que la suite (f_n) converge simplement, mais pas uniformément.

Puisque nous avons trouver la limite de la suite (f_n), pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, nous devons trouver une majoration des fonctions $|f_n|$ par une fonction intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or :

$$\begin{aligned}
\forall x \quad &\in \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \cos x \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad -n \leq -n\cos x \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq e^{-n\cos x} \leq e^{-n} \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq f_n(x) \leq 1
\end{aligned}$$

Les fonctions f_n sont donc positives et majorées, $\forall n \in \mathbb{N}$, par l'indicatrice du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rappel : Une fonction est intégrable sur un domaine $E \subset \mathbb{R}$ si l'intégrale sur E de son module a une valeur finie. Dans notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|\mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}(x)\right| dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} < \infty
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

La suite (f_n) converge simplement vers l'indicatrice de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$. De plus, cette fonction majore, quelque soit n, $|f_n|$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. Pour étudier le domaine de définition, on étudie l'intégrabilité de la fonction
$$f(x,t) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)}$$
sur $[0,+\infty[$ à l'aide des méthodes classiques de convergence d'intégrales, majoration et équivalence et utilisation des fonctions dont on sait qu'elles sont intégrables. On peut ici distinguer le cas $t=0$ du cas $t \neq 0$ car la fonction précédente ne se comporte pas de la même façon.
Deux outils sont essentiels ici :
   * le comportement de $\frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0 avec $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ce qui s'écrit encore $\sin x \sim x$ quand x tend vers 0
   * l'intégrabilité des *fonctions puissances* $\frac{1}{x^\alpha}$ selon que l'on étudie l'intégrabilité au voisinage de 0 (convergence de l'intégrale pour $\alpha < 1$ et divergence sinon) ou l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ (convergence de l'intégrale pour $\alpha > 1$ et divergence sinon).

   - Pour $t=0$ on a
$$f(x,0) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$$
qui est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 0 grâce à $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et donc convergente. Au voisinage de $+\infty$, en majorant $|\sin x|$ par 1 on a
$$|f(x,0)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$
qui donne une intégrale convergente ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$).
   - Pour $t \neq 0$, on a
$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}t^2}$$
au voisinage de 0 car $(x+t^2)$ tend vers t^2 quand $x \to 0$ et $\sin x \sim x$. Au voisinage de $+\infty$, on a comme précédemment $|\sin x| \leq 1$ et $\frac{1}{(x+t^2)} \leq \frac{1}{x}$ donc
$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$
ce qui est une intégrale convergente en $+\infty$.
Remarque : En réalité, on peut se passer de distinguer ces deux cas, et traiter du même coup existence et continuité de $F(t)$. Pour cela, il faut utiliser la majoration
$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)}\right| \leq \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$
Les raisonnements précédents montrent que la fonction de droite est intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$. Par contre il est important de noter ici, qu'il ne faut pas

majorer le $\sin x$ *par* 1, *car la fonction* $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ *n'est pas intégrable au voisinage de* 0 $(\alpha > 1)$.
Il ne faut donc pas systématiquement majorer un sin *ou un* cos *par* 1 *! Rappelons enfin une autre propriété souvent utile de* $\frac{\sin x}{x}$ *qui est une majoration*

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La majoration (1) valable quelque soit t dans $\mathbb{R}$, montre que $F(t)$ existe pour tout t.
Pour la continuité de $F(t)$, on a d'une part continuité de l'application $t \rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ .D'autre part la majoration (1) de $f(x,t)$ par une fonction intégrable *indépendante de* t permet, grâce au Théorème de Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre d'en déduire la continuité de $F(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

2. Remarquons que F est une fonction paire, on peut donc étudier la dérivabilité sur $]0,+\infty[$. On utilise le Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. On va donc examiner si la fonction f vérifie les hypothèses (dérivabilité et majoration du module de la dérivée par une fonction intégrable). La dérivabilité de f au voisinage d'un point t_0 ne pose pas de problème particulier. Calculons donc sa dérivée par rapport à t, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{-2t\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)^2}$$

Soit alors $t_0 > 0$ et prenons $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que $0 < t_0 - \epsilon$ de telle façon que l'intervalle $[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ soit dans $]0,+\infty[$. On doit majorer $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|$ pour tout $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ par une fonction intégrable en x sur $[0,+\infty[$. Pour ce faire on *majore* le numérateur et *minore* le dénominateur ! Pour ce dernier, on a :

$$\left(x+t^2\right)^2 \geq \left(x+(t_0-\epsilon)^2\right)^2 \quad \forall t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]\,.$$

Finalement

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{2\,(t_0+\epsilon)\,|\sin x|}{\sqrt{x}\left(x+(t_0-\epsilon)^2\right)^2} \quad \forall t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$$

La fonction : $x \longrightarrow \frac{2(t_0+\epsilon)|\sin x|}{\sqrt{x}\left(x+(t_0-\epsilon)^2\right)^2}$ est intégrable au voisinage de $x=0$ puisqu'elle se comporte comme $\frac{2(t_0+\epsilon)|\sin x|}{(t_0-\epsilon)^4\sqrt{x}}$ ou encore, grâce à l'équivalence du sin, comme $\frac{2(t_0+\epsilon)\sqrt{x}}{(t_0-\epsilon)^4}$ qui est intégrable au voisinage de 0. Au voisinage de $+\infty$ on minore $\left(x+(t_0-\epsilon)^2\right)^2$ par x^2 et on majore $|\sin x|$ par 1 pour en déduire

$$\frac{2\,(t_0+\epsilon)\,|\sin x|}{\sqrt{x}\left(x+(t_0-\epsilon)^2\right)^2} \leq \frac{2\,(t_0+\epsilon)}{x^2\sqrt{x}}$$

qui est intégrable en $+\infty$ $(\alpha > 1)$.

Remarque. Pourquoi le raisonnement ne subsiste pas en $t_0 = 0$? *Au voisinage de* $t_0 = 0$ *on n'aura seulement la minoration :* $\left(x + t^2\right)^2 \geq x^2$ *et donc*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{2\epsilon\,|\sin x|}{x^2\sqrt{x}}$$

Or, au voisinage de $x = 0$ *cette fonction majorante se comporte comme* $\frac{2\epsilon\sqrt{x}}{x^2}$ *(toujours grâce à l'équivalence du* sin) *ou encore comme* $\frac{2\epsilon}{x^{3/2}}$ *qui diverge* ($\alpha > 1$).

3. Pour étudier la dérivabilité à droite de $F(t)$ en $t_0 = 0$,on fait une étude *directe*, sans avoir recours au théorème de dérivation qui, on vient de le voir ne s'applique pas.

   Ceci est l'occasion de rappeler que le Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre donne des conditions *suffisantes* mais pas *nécessaires.*

   Dire que $F(t)$ est dérivable à droite en $t_0 = 0$ signifie que

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t} \quad \text{existe et est finie.}$$

   On a

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x+t^2} - \frac{1}{x}\right)dx = -\int_0^{+\infty} t\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{x\left(x+t^2\right)}\,dx$$

   A ce niveau, on ne peut pas faire passer la limite à l'intérieur, même en essayant d'utiliser le théorème de convergence dominée. On effectue le changement de variable annoncée : $x = u^2t^2$ avec $u \in [0, +\infty[$ et donc $dx = 2ut^2du$, les bornes d'intégration ne changent pas. En effet, lorsque $x = 0$, comme t est différent de 0, u doit être égal à 0. Pour x tendant vers $+\infty$, comme nous prenons u positif, u est égal à $+\infty$. L'intégrale devient, en remarquant qu'ici $t \geq 0$ et donc $\sqrt{u^2t^2} = ut$:

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = -\int_0^{+\infty} t\frac{\sin u^2t^2}{ut}\,\frac{1}{u^2t^2\left(u^2t^2 + t^2\right)}2ut^2du$$

   soit :

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = -2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(u^2t^2\right)}{u^2t^2}\,\frac{1}{u^2+1}\,du$$

   Sous cette forme, le théorème de convergence dominée s'applique sans difficultés. Pour tout u *fixé,* on a $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(u^2t^2\right)}{u^2t^2} = 1$ et donc $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(u^2t^2\right)}{u^2t^2}\frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{u^2+1}$. De plus, la propriété de majoration de $\frac{\sin x}{x}$ rappelée plus haut, nous permet d'écrire

$$\left|\frac{\sin\left(u^2t^2\right)}{u^2t^2}\,\frac{1}{u^2+1}\right| \leq \frac{1}{u^2+1} = h(u)$$

   h est une fonction intégrable de u sur $[0, +\infty[$ avec même

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=-2\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du=-\pi=F_d'(0)$$

4. La fonction étant paire, on aura $F'(-t)=-F'(t)$ et en particulier $F_g'(0)=\pi$. Si l'on reprend le calcul, le signe $-$ va apparaître dans le terme $\sqrt{u^2t^2}$ qui pour $t\leq 0$ et toujours $u\in[0,+\infty[$ devient $-ut$.

   En conclusion, la fonction $F(t)$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, mais qui sont distinctes : la fonction $F(t)$ n'est pas dérivable en 0.