Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Exercices "Type 1" entièrement corrigés avec remarques et méthodologie.

Exercice 1.

Pour $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} dx$$

Justifier l'existence de I_n, puis étudier la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

(**Indication :** penser à utiliser l'inégalité 2 du QCM de prérequis)

Exercice 2.

On pose

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1 + x^2} dx$$

Vérifier que la fonction : $t \to f(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme d'intégrale.

Correction de l'exercice 1

Nous devons prendre la limite de la suite I_n. La première idée qui nous vient à l'esprit est de regarder qu'elle est la limite de la fonction à intégrer qui dépend de n. Même avec des conditions de convergence favorable sur la suite de fonctions, nous ne pouvons intervertir le signe limite et intégrale car une des bornes d'intégration dépend de n. Nous devons donc d'abord s'affranchir de ce problème. Pour cela, nous modifions l'écriture de l'intégrale via la fonction à intégrer en utilisant l'indicatrice correspondant au domaine d'intégration ($\mathbb{I}_{[0,n]}$), soit :

$$I_n = \int_0^n \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,n]}(x)\, dx$$

Nous pouvons, à présent, appliquer la convergence dominée à la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,n]}(x)$$

sur l'intervalle fixe $[0, +\infty[$.

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, nous devons déterminer la limite de la suite de fonctions et trouver une majorant du module de chaque fonction. Nous devons donc déterminer la limite de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ avec $0 \leq x \leq n$ puisque en dehors de cet intervalle, la fonction $\mathbb{I}_{[0,n]}(x)$ est nulle et $f_n(x) = 0$.

La limite de $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ quand $n \to +\infty$ est une forme indéterminée car le facteur entre parenthèses tend vers 1 mais à une puissance tendant vers l'infini. Dans ce cas, nous pouvons contourner ce problème en prenant le logarithme népérien. Nous avons :

$$\log\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] = n\log\left(1-\frac{x}{n}\right) \quad \text{avec } 0 \leq x \leq n$$

Quand $n \to +\infty$, le rapport $\frac{x}{n}$devient petit devant 1, nous pouvons donc prendre l'équivalent du log au voisinage de 1. Soit

$$n\log\left(1-\frac{x}{n}\right) \sim n\left(-\frac{x}{n}\right) = -x$$

quand x est fixé et $n \to +\infty$.

Finalement, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,n]}(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$$

ce que l'on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,n]}(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad \text{sur} \quad [0,+\infty[$$

Il nous reste à trouver le majorant du module des f_n. Pour cela, nous utilisons l'inégalité classique (à connaître)

$$1 + u \leq e^u \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Si nous l'appliquons pour
$$u = -\frac{x}{n}$$
nous obtenons :
$$1 - \frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}}$$
Elevons cette inégalité à la puissance n, comme $x \in [0, n]$, $1 - \frac{x}{n}$ est positif, le sens de l'inégalité reste le même, soit :
$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{x}{n}}\right)^n = e^{-x}$$
et donc
$$\left|\frac{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}{\sqrt{x}} \mathbb{I}_{[0,n]}(x)\right| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = g(x)$$
sur $[0, +\infty[$ (pour tout n) en majorant *très grossièrement* $\mathbb{I}_{[0,n]}(x)$ par $\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$ pour avoir une majoration indépendante de n.

Reste à vérifier que cette dernière fonction est bien intégrable sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de 0 la fonction $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque e^{-x} tend vers 1 et on sait que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0 ($\alpha < 1$, voir module de rappel sur les intégrales généralisées). Au voisinage de $+\infty$ la fonction $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est majorée par e^{-x} qui est une fonction intégrable en $+\infty$. g est bien intégrable et nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée On a donc bien
$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Correction de l'exercice 2

L'*existence* de $f(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ et sa *continuité* se démontrent par la même majoration de
$$g(t, x) = \frac{\arctan(tx)}{1 + x^2}$$
Comme seul le terme du numérateur contient le paramètre t, cherchons une majoration de $\arctan u$ lorsque u est compris entre 0 et ∞. Sur cet intervalle arctan est une fonction croissante, elle sera donc majorée par sa valeur en $+\infty$. Nous avons donc :
$$|\arctan u| \leq \frac{\pi}{2}$$
Nous pouvons donc facilement trouver un majorant de $|g|$:
$$|g(t, x)| \leq \frac{\pi}{2(1 + x^2)} = h(x)$$
Il est évident que la fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (elle est équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$). g est donc intégrable quelque soit t car la majoration précédente est valable quelque soit t. Cela conduit à démontrer que f est défini pour $t \in \mathbb{R}$.

Pour la *continuité*, considérons $t_0 \in \mathbb{R}$, et un voisinage de t_0. L'application $t \to g(t,x)$ est continue sur ce voisinage. De plus, la majoration précédente est toujours valable autour de t_0. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres nous donne que f est continue en t_0.

Pour la *dérivabilité*, par parité, nous pouvons nous placer sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t_0 > 0$ et $t_0 - \epsilon > 0$ g est dérivable et sa dérivée vaut :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\arctan(tx)}{1+x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{1+x^2t^2}$$

Pour majorer le module de cette dérivée, nous devons minorer le dénominateur (puisque la variable t n'intervient que là). La manière la plus simple de minorer t par la valeur minimale qu'il peut prendre sur le voisinage considéré, i.e. $t_0 - \varepsilon$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} t^2 &\geq (t_0-\epsilon)^2 \\ \frac{1}{1+x^2t^2} &\leq \frac{1}{\left(1+(t_0-\epsilon)^2x^2\right)} \\ \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\arctan(tx)}{1+x^2}\right)\right| &\leq \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\left(1+(t_0-\epsilon)^2x^2\right)} = s(x) \end{aligned}$$

Nous devons vérifier que cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\infty[$. Le seul problème se situe en $+\infty$. Cherchons donc un équivalent. Nous avons :

$$\frac{x}{1+x^2} \sim \frac{1}{x}$$

et

$$\frac{1}{\left(1+(t_0-\epsilon)^2x^2\right)} \sim \frac{1}{(t_0-\varepsilon)^2x^2}$$

donc :

$$s(x) \sim \frac{1}{(t_0-\varepsilon)^2x^3}$$

qui est intégrable en $+\infty$. Donc s est intégrable sur $[0,\infty[$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres nous donnent la dérivabilité de f en t_0.
Remarque : La minoration de t par $(t_0-\varepsilon)$ est fondamentale. Imaginons que nous minorions par 0, ce qui est vraie, nous aurions la relation :

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\arctan(tx)}{1+x^2}\right)\right| \leq \frac{x}{1+x^2} = v(x)$$

Cherchons un équivalent en $+\infty$ de v : $\frac{1}{1+x^2}$ a pour équivalent $\frac{1}{x^2}$, donc $\frac{x}{1+x^2}$ a pour équivalent $\frac{1}{x}$. Or $\frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Nous ne pourrions donc rien conclure sur l'intégrabilité de la dérivée. C'est pour cette même raison que nous ne pouvons conclure en $t=0$.

La deuxième conséquence du théorème de dérivation des intégrales à paramètres nous donne l'expression de la dérivée de f, soit :

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \frac{1}{(1+t^2x^2)}\, dx$$

La majoration précédente, assure aussi la continuité de la dérivée. Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Exercice "Type 2" avec notes et solutions.

Exercice 1.

Soit la fonction $f_n(x) = 1 - e^{-n\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n). Par le théorème de convergence dominée, déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx.$$

Exercice 2.

On considère la fonction F définie par :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}\,(x+t^2)} dx \ .$$

1) Déterminer le domaine de définition, puis le domaine de continuité de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3) Montrer que F admet une dérivée à droite en 0. Dans le calcul de $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ on pourra faire le changement de variable $x = u^2t^2$ puis utiliser le théorème de convergence dominée. (question facultative)

4) F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? (question facultative)

Correction de l'exercice 1
La démarche à mettre en oeuvre est la suivante :
- Etude de la convergence de la suite de fonctions ;
- Si la convergence est simple, on essaie d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Indication : Distinguer les cas $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ pour l'étude de convergence et examiner si la limite est continue.
Résultat intermédiaire :

$$f_n(x) \rightarrow \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{array} \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Indication : La fonction $\mathbb{I}_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$ est intégrable.
Solution :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 2
1- Indications : Pour étudier le domaine de définition, on étudie l'intégrabilité de la fonction $f(x,t) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}(x+t^2)}$sur $[0,+\infty[$ à l'aide des méthodes classiques de convergence d'intégrales, majoration et équivalence et utilisation des fonctions dont on sait qu'elles sont intégrables. On peut ici distinguer le cas $t = 0$ du cas $t \neq 0$ car la fonction précédente ne se comporte pas de la même façon.

Nous rappelons que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et que $|\sin x|$ est majorable par 1
Solution : le domaine de définition de F est $\mathbb{R}$.

Indications : Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
Solution : le domaine de continuité de F est $\mathbb{R}$.

2- Indications : Remarquer que la fonction F est paire (l'étude peut donc se limiter à $\mathbb{R}^+$). Appliquer le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre. Penser à utiliser la borne inférieure et supérieure de l'intervalle utilisé (i.e. $t_0 - \varepsilon$ et $t_0 + \varepsilon$) afin de minorer le dénominateur et de majorer le numérateur de la fraction obtenue.
Solution : F est intégrable sur $\mathbb{R}^*$.

3- Indications : Pour étudier la dérivabilité à droite de $F(t)$ en $t_0 = 0$, faire une étude *directe*, sans avoir recours au théorème de dérivation qui ne s'applique pas, soit utiliser la définition suivante :
Dire que $F(t)$ est dérivable à droite en $t_0 = 0$ signifie que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \quad \text{existe et est finie.}$$

Dans la suite du calcule, on pourra effectuer le changement de variable annoncée : $x = u^2t^2$ avec $u \in [0, +\infty[$ et donc $dx = 2ut^2du$.

Après les modifications dus à ce changement de variable, le théorème de convergence dominée s'applique sans difficultés.

Solution :

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = -2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} \, du = -\pi = F'_d(0)$$

4- Indication : La fonction étant paire, donc la dérivée est impaire.

Solution : La fonction $F(t)$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, mais qui sont distinctes : la fonction $F(t)$ n'est pas dérivable en 0.

Deuxième semaine de travail : Calcul intégral

Exercice "Type 3" devoir.

Exercice 1 Convergence dominée
On étudie les limites, quand n tend vers l'infini, des deux suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}\, dx$$

et

$$J_n = \int_0^1 n^2 x e^{-n^2 x^2}\, dx$$

On pose $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}$ et $g_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$.

1. Vérifier que $f_n(x)$ et que $g_n(x)$ tendent vers 0 partout.
2. Vérifier que
$$|f_n(x)| \leq 1/e \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in [0,1]$$
3. En déduire par Convergence Dominée que
$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$
4. Calculer J_n par un changement de variables, et vérifier que
$$\lim_{n\to\infty} J_n = 1/2$$

QCM

Quelle que soit la réponse choisie, il faut justifier le choix. Une réponse juste, mais non justifiée ne comptera pas.

1- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\cos x)^n}{1+x^2} dx$ vaut
A- $\frac{\pi}{4}$
B- 0
C- $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

2- Soit $J_n = \int_0^1 \left(\sin \frac{1}{x}\right)^n dx$une suite de fonction. Quelle est la limite de J_n quand $n \to +\infty$
A- 0
B- 1
C- $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$