Chapitre 1

Séries de Fourier

Les signaux électriques peuvent être représentés de deux manières différentes : soit par leur variations temporelles en amplitude et en phase, soit par leur spectre en fréquence.

Pourquoi utiliser la représentation spectrale alors que la représentation temporelle est naturelle ?

Il y a un argument technique (au sens technique mathématique) à cela : pour *modéliser* un signal se propageant le long d'une chaîne électronique, l'approche temporelle nécessite d'effectuer des *produits de convolution* (cours de la semaine 3) alors que l'approche fréquentielle permet de se limiter à des *multiplications ordinaires* de fonctions de transfert en profitant des relations entre Transformée de Fourier et Convolution, ce qui est beaucoup plus simple. Ainsi en Electronique, la fonction de transfert d'un filtre, qui traduit la manière dont un signal est modifié par le passage au travers du filtre, est exprimée en *fréquence* (le plus souvent sous forme de diagramme de Bode) donc au travers de la modélisation spectrale.

Cette représentation en fréquence peut prendre deux formes différentes en fonction de la nature des signaux. Si nous considérons un signal périodique, nous utiliserons la décomposition en Série de Fourier et nous obtiendrons un *spectre discret*, composé d'une famille dénombrable de fréquences. Par contre, dans le cas de signaux quelconques non périodiques, tels les signaux fournis par des capteurs, il est nécessaire, d'utiliser la Transformée de Fourier, généralisation de la décomposition en Série de Fourier. Dans ce cas nous obtenons un *spectre continu.*

La Transformée de Fourier sera l'objet de la troisième semaine de travail (après avoir effectué quelques rappels sur l'intégration lors de la deuxième semaine) tandis que la décomposition en série de Fourier est traitée dans ce chapitre.

1.1 Polynômes trigonométriques

Définition 1 *Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite* ***périodique de de période*** a $(a > 0)$ *ssi*

$$f(t + a) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L' exemple de base d'une fonction périodique de période a est la fonction $e_n(t) = e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$ avec

n dans $\mathbb{Z}$ (ensembles des entiers relatifs)[1] ou les fonctions $\sin 2\pi n\frac{t}{a}$ et $\cos 2\pi n\frac{t}{a}$. Si, comme souvent, $a = 2\pi$, la périodicité s'écrit : $f(t+2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et les exemples de base précédents sont les fonctions : $e_n(t) = e^{int}$ avec n entier ou encore : $\sin nt$ et $\cos nt$. Pour ces fonctions sinus et cosinus qui ont des propriétés de parité bien connues, on se limitera à n dans $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers positifs) puisque $\sin(-n)t = -\sin nt$ et $\cos(-n)t = \cos nt$.

De façon générale, une fonction périodique de période a est définie sur un intervalle d'une période, par exemple $[0, a[$ ou $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$ puis est étendue sur $\mathbb{R}$ par translation. Il est clair que si

$$f(t+a) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

on a aussi

$$f(t+na) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}$$

et donc f est aussi périodique de période na.On peut souvent trouver *une plus petite période*, on ne rentre pas ici dans l'étude de ce problème. En théorie du signal la quantité

$$\nu = \frac{1}{a} \text{ est une fréquence de } f.$$

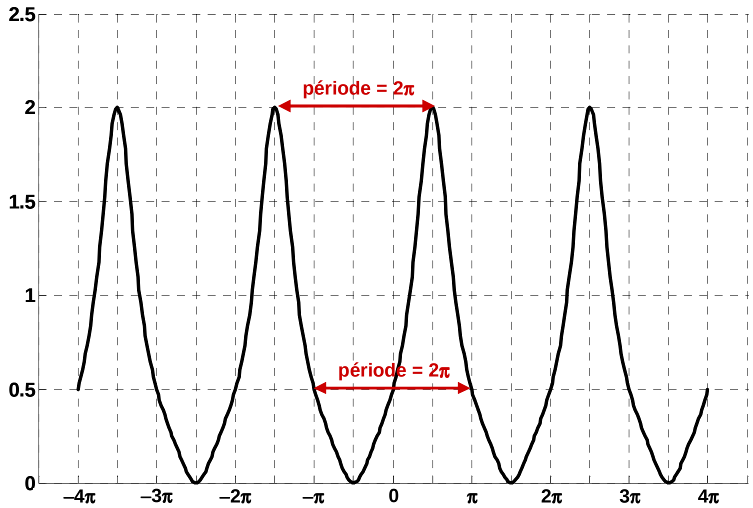

Fig. 1.1 – Exemple d'une fonction périodique de période 2π

Tous les calculs pourront se faire indifféremment sur n'importe quel intervalle de longueur la période.

[1]On utilisera abondamment dans ce cours les nombres complexes $e^{i\theta}$, il est donc essentiel d'avoir en tête - ou de revoir- leur définition et propriétés. On utilisera ici $e^{2i\pi n} = 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 2 *On appelle* ***polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à*** N *(N entier positif), toute fonction qui s'écrit*

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &= c_{-N}\, e^{2i\pi(-N)\frac{t}{a}} + \cdots + c_{-1}\, e^{2i\pi(-1)\frac{t}{a}} + c_0 + c_1\, e^{2i\pi(+1)\frac{t}{a}} + \cdots + c_N\, e^{2i\pi(N)\frac{t}{a}} \end{aligned}$$

où les c_n sont des nombres complexes. C'est donc une somme finie de fonctions périodiques de base et c'est encore une fonction périodique.

On notera $\mathcal{F}_N$ l'ensemble de ces polynômes (a étant fixé). On peut également écrire $p(t)$ comme une somme finie de sinus et de cosinus.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{a} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Le lien entre les c_n et les a_n et b_n est donné par les formules suivantes

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} & \text{pour } n \geq 1 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) & \text{pour } n \geq 1 \\ a_0 = c_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

et inversement

$$\begin{cases} c_n = \frac{(a_n - i b_n)}{2} & \text{pour } n \geq 1 \\ c_{-n} = \frac{(a_n + i b_n)}{2} & \text{pour } n \geq 1 \\ c_0 = a_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Exercice 1 *Faire ce calcul dans le cas particulier $N = 2$. Pour cela, écrire*

$$e^{2i\pi n \frac{t}{a}} = \cos 2\pi n \frac{t}{a} + i \sin 2\pi n \frac{t}{a}$$

et regrouper les termes associés à n et à $-n$, grâce aux propriétés de parité rappelées plus haut.

Solution 1 *Prenons $N = 2$ et considérons l'écriture développée du polynôme plutôt que son écriture sous forme de sommation.*

$$\begin{aligned} p(t) &= c_{-2}\, e^{2i\pi(-2)\frac{t}{a}} + c_{-1}\, e^{2i\pi(-1)\frac{t}{a}} + c_0 + c_1\, e^{2i\pi(+1)\frac{t}{a}} + c_2\, e^{2i\pi(2)\frac{t}{a}} \\ &= c_{-2} \left[\cos\left(-4\pi\frac{t}{a}\right) + i \sin\left(-4\pi\frac{t}{a}\right) \right] + c_{-1} \left[\cos\left(-2\pi\frac{t}{a}\right) + i \sin\left(-2\pi\frac{t}{a}\right) \right] \\ &\quad + c_0 \\ &\quad + c_1 \left[\cos\left(2\pi\frac{t}{a}\right) + i \sin\left(2\pi\frac{t}{a}\right) \right] + c_2 \left[\cos\left(4\pi\frac{t}{a}\right) + i \sin\left(4\pi\frac{t}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés de parité et imparité respectivement du cosinus et du sinus, on peut regrouper les termes et on obtient

$$p(t) = c_0+(c_{-1}+c_1)\cos\left(2\pi\frac{t}{a}\right)+i\,(-c_{-1}+c_1)\sin\left(2\pi\frac{t}{a}\right)+(c_{-2}+c_2)\cos\left(4\pi\frac{t}{a}\right)+i\,(-c_{-2}+c_2)\sin\left(4\pi\frac{t}{a}\right)$$

à comparer à

$$p(t) = a_0 + a_1\cos\left(2\pi\frac{t}{a}\right) + b_1\sin\left(2\pi\frac{t}{a}\right) + a_2\cos\left(4\pi\frac{t}{a}\right) + b_2\sin\left(4\pi\frac{t}{a}\right)$$

On en déduit pour ce cas $N = 2$ *, les formules (1.1)*

$$\begin{cases} a_1 &= c_1 + c_{-1} \\ b_1 &= i(c_1 - c_{-1}) \\ a_0 &= c_0 \\ a_2 &= c_2 + c_{-2} \\ b_2 &= i(c_2 - c_{-2}) \end{cases}$$

Ensuite, en combinant les deux première équations par exemple, on en déduit c_1 *et* c_{-1} *en fonction de* a_1 *et* b_1. *On a* $ia_1 \;\; + b_1 = 2ic_1$ *donc* $c_1 = \frac{ia_1 \;\; + b_1}{2i} = \frac{a_1 - ib_1}{2}$ *et de même pour* c_{-1}.

Remarque : Il faut bien noter que les coefficients a_n et b_n sont, comme les c_n, à **valeurs complexes,** même si le plus souvent dans nos exemples, on se limitera à des a_n et b_n réels ce qui nous donne un pôlynome $p(t)$ à valeurs réelles (voir plus bas) et autorise une représentation graphique simple.

Par exemple, le polynôme trigonométrique 2π**-périodique** $p(t) = 1+\cos t+2\sin t-\cos 2t+\sin 2t$ **admet la réprésentation suivante.**

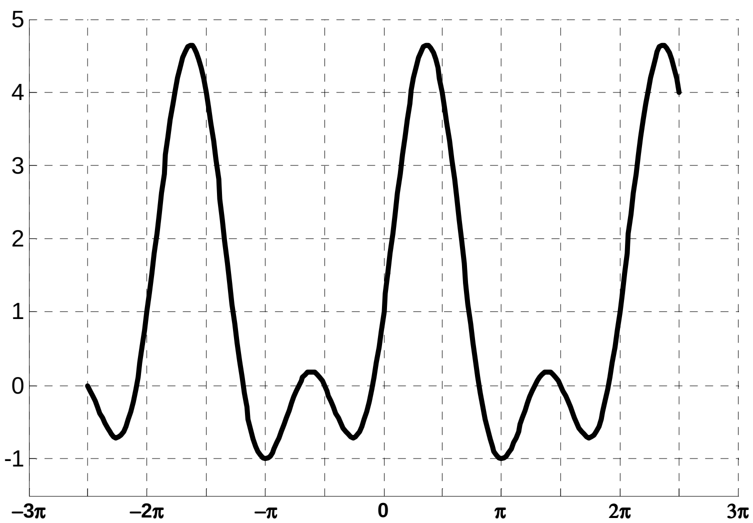

FIG. 1.2 – Graphe du polynôme trigonométrique p.

Les notions qui suivent renvoient au module précédent d'Algèbre Linéaire. Il est indispensable de revoir rapidement les notions de ce module et de s'y référer.

L'ensemble $\mathcal{F}_N$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{C}$ de dimension $2N+1$ admettant comme base naturelle les fonctions $\left\{e_n(t) = e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right\}_{n\in[-N,N]}$. Cet espace vectoriel est muni du *produit scalaire à symétrie hermitienne*

$$(p,q) = \int_0^a p(t)\,\overline{q(t)}\,dt \quad \forall p,q \in \mathcal{F}_N$$

(où $\overline{q(t)}$ désigne le complexe conjugué de $q(t)$) et donc de la norme associée

$$\|p\|_2 = (p,p)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^a |p(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall p \in \mathcal{F}_N$$

Avec ce produit scalaire, les fonctions $e_n(t)$ sont orthogonales et

$$\left\{\begin{array}{lcl} (e_n,e_m) & = & 0 \quad \text{si } n \neq m \\ (e_n,e_n) & = & a \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Exercice 2 *Calculer ces produits scalaires (e_n,e_m) avec $n \neq m$ et calculer aussi (e_n,e_n).*

Solution 2 *Comme $\overline{e^{2i\pi m\frac{t}{a}}} = e^{-2i\pi m\frac{t}{a}}$, on a*

$$(e_n,e_m) = \int_0^a e^{2i\pi n\frac{t}{a}}.e^{-2i\pi m\frac{t}{a}}\,dt = \int_0^a e^{2i\pi(n-m)\frac{t}{a}}\,dt.$$

Si $n=m$, $e^{2i\pi(n-n)\frac{t}{a}} = 1$ et l'intégrale vaut a. Si $n \neq m$, on utilise directement une primitive

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{2i\pi(n-m)\frac{t}{a}}\,dt &= \left[\frac{a}{2i\pi(n-m)}e^{2i\pi(n-m)\frac{t}{a}}\right]_0^a \\ &= \frac{a}{2i\pi(n-m)}\,[1-1] = 0\end{aligned}$$

puisque $e^{2i\pi(n-m)\frac{t}{a}}$ vaut 1 pour $t=a$ et $t=0$. Bien noter que les expressions précédentes n'ont un sens que parce que nous sommes dans le cas $n-m \neq 0$ et que c'est pour cette raison que nous avons traité à part le cas $n=m$.

On souhaite avoir l'expression des coefficients c_n en fonction de p. Les propriétés d'orthogonalité de la famille e_n fournissent un **calcul simple**[2]. On a

$$c_n(p) = c_n = \frac{1}{a}\int_0^a p(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}dt \quad \forall n \in [-N,N] \tag{1.4}$$

et donc grâce, aux formules précédentes

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n(p) = a_n & = & \frac{2}{a}\int_0^a p(t)\,\cos(2\pi n\frac{t}{a})\,dt \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N \\ b_n(p) = b_n & = & \frac{2}{a}\int_0^a p(t)\,\sin(2\pi n\frac{t}{a})\,dt \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N \\ a_0(p) = a_0 & = & \frac{1}{a}\int_0^a p(t)\,dt \end{array}\right. \tag{1.5}$$

[2]C'est là tout l'intérêt d'avoir une structure de produit scalaire dans l'espace des fonctions dans lequel on travaille.

Exercice 3 *Montrer que l'expression intégrale de c_n (1.4) s'obtient dans le cas général en développant le produit scalaire $\left(p(t)\,,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)$.*

Solution 3 *On écrit pour **n fixé***

$$\left(p(t)\,,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right) = \left(\sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m \left(e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)$$

*Remarquer que l'on a changé le nom de l'indice dans la sommation, ce que l'on **peut faire** sans problème, c'est une sorte d'indice muet, et ce que l'on **doit faire** pour y voir clair, car les deux indices ne jouent pas le même rôle dans cette écriture ! L'indice n est fixé (par exemple $n = 5$) et l'indice m est un indice de la sommation.*

Grâce à l'orthogonalité des fonctions e_n (1.3) tous les produits scalaires $\left(e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)$ sont nuls sauf celui correspondant à $m = n$ et celui ci vaut a. Finalement

$$\left(p(t)\,,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right) = c_n a$$

ce qui donne l'expression

$$c_n = \frac{1}{a}\left(p(t)\,,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right) = \frac{1}{a}\int_0^a p(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt$$

de c_n.

Pour $a = 2\pi$, on a les formules suivantes.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,e^{-int}dt \quad \forall n \in [-N, N]$$

et

$$\begin{cases} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,\cos(\,nt)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,\sin(\,nt)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,dt \end{cases}$$

Ces coefficients c_n (resp. a_n et b_n) sont les **coefficients de Fourier** de p. Pour les c_n on parle parfois de coefficients de Fourier **complexes** en faisant référence à la décomposition en exponentielles complexes, et pour les a_n et b_n de coefficients de Fourier en sinus et cosinus. Mais, répétons le, les coefficients a_n et b_n sont, comme les c_n à **valeurs complexes.**

Comme p est périodique de période a , on peut calculer les intégrales précédentes sur n'importe quel intervalle de longueur a. En particulier pour utiliser les propriétés de parité ou d'imparité de la fonction p il est utile d'intégrer sur l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Les propriétés suivantes s'en déduisent facilement.

$$\begin{cases} p \text{ fonction réelle} \iff c_{-n} = \overline{c_n} \quad \forall n \\ p \text{ fonction paire} \iff c_{-n} = c_n \quad \forall n \\ p \text{ fonction impaire} \iff c_{-n} = -c_n \quad \forall n \end{cases} \tag{1.6}$$

et souvent plus utiles, les propriétés correspondantes des a_n et b_n

$$\left\{\begin{array}{c} p \text{ fonction réelle } \Longleftrightarrow a_n, b_n \text{ réels} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ p \text{ fonction paire } \Longleftrightarrow b_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \\ p \text{ fonction impaire } \Longleftrightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \end{array}\right. \tag{1.7}$$

Exercice 4 *Traiter par exemple la caractérisation de la parité.*

Solution 4 *Si p est paire i.e. $p(t) = p(-t) \quad \forall t$, en faisant le changement de variable $u = -t$ on a*

$$c_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}}\, dt = \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} p(-u)\, e^{2i\pi n \frac{u}{a}}\, (-du) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(u)\, e^{2i\pi n \frac{u}{a}}\, du = c_{-n}$$

Donc p paire $\Longrightarrow c_{-n} = c_n$.

Inversement, supposons que $c_{-n} = c_n \quad \forall n$. En faisant cette fois le changement d'indice $m = -n$ on peut écrire

$$\begin{aligned} p(-t) &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} = \sum_{m=N}^{m=-N} c_{-m}\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} \\ &\quad \text{et en réordonnant les termes de la somme} \\ &= \sum_{m=-N}^{m=N} c_{-m}\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} \end{aligned}$$

Comme $c_{-n} = c_n \quad \forall n$, on a $p(-t) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} = p(t)$. Ce qui démontre l'implication de la droite vers la gauche et donc l'équivalence des deux propositions.

Pour le polynôme trigonométrique $p(t)$ son énergie est donnée par

$$\frac{1}{a} \int_0^a |p(t)|^2\, dt$$

(Remarquons que $p(t)$ est une fonction continue comme combinaison linéiare de cosinus et sinus qui sont des fonctions continues, dont $|p(t)|^2$ est également continue et donc intégrable sur l'intervalle $[0, a]$).

Comment s'exprime cette énergie à l'aide des coefficients de Fourier ?

Proposition 1 *Dans $\mathcal{F}_N$, on a :*

$$\frac{1}{a} \int_0^a |p(t)|^2\, dt = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \right) \tag{1.8}$$

Il s'agit de l'égalité de Parseval qui exprime donc l'énergie du signal $p(t)$ en fonction des coefficients de Fourier.

Exercice 5 *Démontrer cette formule.*

Solution 5 *C'est typiquement une égalité portant sur la norme associée au produit scalaire*[3]*. On a*

$$\int_0^a |p(t)|^2\,dt = (p,p) = \left(\sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)$$

Là encore il est indispensable de ne pas prendre le même indice dans les deux sommes ! Lorsque l'on développe, toujours en utilisant l'orthogonalité des fonctions e_n seuls les termes correspondant aux couples (n,m) tels que $n = m$ ne sont pas nuls. En détaillant le calcul

$$\begin{aligned}\int_0^a |p(t)|^2\,dt &= \left(\sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)\\ &= \sum_{m=-N}^{m=N}\sum_{n=-N}^{n=N} c_m\,\overline{cn}\,\left(e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)\end{aligned}$$

(dans le produit scalaire à symétrie hermitienne $(p,\lambda q) = \overline{\lambda}\,(p,q)$). D'après les propriété d'orthogonalité (1.3) les produits scalaires sont nuls lorsque $n \neq m$. Ainsi dans la somme double précédente, les termes correspondant à des couples (m,n) avec $n \neq m$ sont nuls. Ne subsistent que les termes correspondants à des couples d'indice (n,n), avec $n = -N, -(N-1), \ldots, 0, 1, \ldots, (N-1), N$. On est ramené à une somme simple

$$\int_0^a |p(t)|^2\,dt = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\overline{c_n}\,\left(e^{2i\pi n\frac{t}{a}}, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right) = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2\,a$$

(grâce à (1.3)). Pour exprimer $\sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2$ en fonction des a_n et b_n, on utilise les formules (1.2). Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}|c_n|^2 &= c_n\overline{c_n} = \frac{(a_n - ib_n)}{2}.\frac{(\overline{a_n} + i\overline{b_n})}{2}\\ &= \frac{a_n\overline{a_n} - ib_n\overline{a_n} + ia_n\overline{b_n} + b_n\overline{b_n}}{4}\\ &= \frac{|a_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}(ia_n\overline{b_n}) + |b_n|^2}{4}\end{aligned}$$

(car $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$).Un calcul absolument analogue, donne pour $n \geq 1$

$$|c_{-n}|^2 = \frac{|a_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}(ia_n\overline{b_n}) + |b_n|^2}{4}$$

En sommant et en utilisant $c_0 = a_0$, il vient

$$\sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)}{2}$$

Bien entendu le calcul est grandement simplifié lorsque a_n , b_n sont réels, puisqu'alors :

$$|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \quad \textit{pour} \;\; n \geq 1.$$

[3]Revoir la note 2 !

1.2 Etude d'un signal périodique

L'espace $\mathcal{F}_N$ des polynômes trigonométriques fournit une large famille de fonctions périodiques, mais pas assez riche encore pour espérer représenter **toute** fonction périodique. La raison essentielle est la suivante : on sait que les fonctions $t \to \sin(2\pi n \frac{t}{a})$ et $t \to \cos(2\pi n \frac{t}{a})$ sont continues, dérivables et même indéfiniment dérivables. Toute combinaison linéaire **finie** sera encore continue, dérivable et indéfiniment dérivable. Ainsi toutes les fonctions de l'espace $\mathcal{F}_N$ ont ces **propriétés de régularité**. Or très souvent, on a à étudier des fonctions périodiques **discontinues.**

Considérez l'exemple suivante

$$f(t) = t - E(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où $E(t)$ est la partie entière de t c'est à dire **le plus grand entier inférieur ou égal**[4] **à** t. Par exemple : $E(3,5) = 3$, $E(-4,5) = -5$, $E(2) = 2$, $E(-2\pi) = -7$!

Voici le graphe de f.

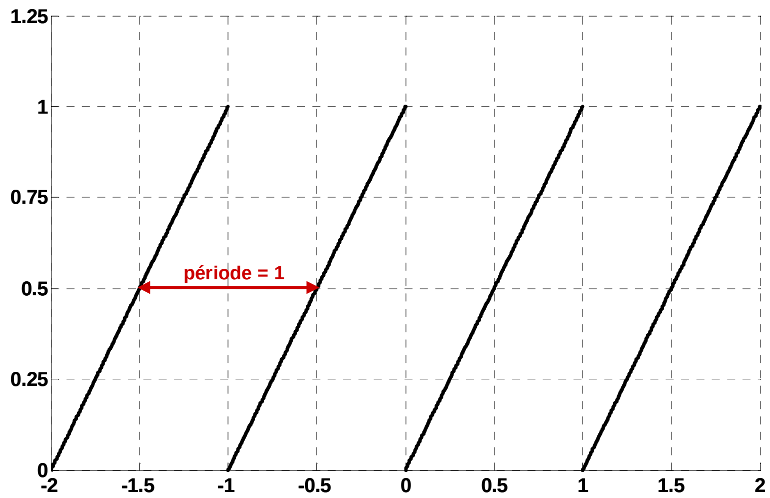

FIG. 1.3 – Graphe de la fonction f.

Cette fonction est clairement périodique de période $a = 1$ mais possède des discontinuités pour toute valeur entière, ce n'est donc pas un polynôme trigonométrique.

On peut alors avoir l'idée suivante : puisque les sommes **finies** de fonctions $\sin(2\pi n \frac{t}{a})$ et $\cos(2\pi n \frac{t}{a})$ (ou de façon équivalente les fonctions $e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$) ne suffisent pas à écrire toutes les fonctions périodiques de période a, peut être les **sommes infinies** de telles fonctions, vont-elles suffire ? En d'autres termes, si f est une fonction périodique de période a, peut-on trouver des coefficients a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$,

[4] Il est utile d'avoir en tête la caractérisation suivante de la partie entière : $E(x)$ vérifie les 2 conditions

$$\begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z} \\ E(x) \leq x < E(x) + 1 \end{cases}$$

tels que

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t}{a}+b_n\sin 2\pi n\frac{t}{a}\right)\quad \forall t\in\mathbb{R} \tag{1.9}$$

(ou des coefficients c_n pour $n\in\mathbb{Z}$, tels que

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\quad \forall t\in\mathbb{R} \tag{1.10}$$

). On a donc ici à étudier des **séries de fonctions**[5] trigonométriques. On entre dans le domaine des **séries de Fourier.**

Quelles sont alors les questions qui se posent ?

1. Calculer les coefficients a_n et b_n pour $n\in\mathbb{N}$ (resp. les c_n pour $n\in\mathbb{Z}$). C'est le problème d'*analyse du signal.*
2. Etudier la convergence de la série (1.9) (resp. (1.10)). En réalité, pour ces séries, il y a plusieurs types de convergence possibles.

   Rappelons le mode de convegrence le plus simple à savoir la **convergence ponctuelle en un instant** t_0 de (1.9) : la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t}{a}+b_n\sin 2\pi n\frac{t}{a}\right)$ converge en t_0 si et seulement si la suite $S_N(t_0)=\sum_{n=0}^{N}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t_0}{a}+b_n\sin 2\pi n\frac{t_0}{a}\right)$ a une limite finie l quand n tend vers l'infini et cette limite l est la somme de la série

   $$l=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t_0}{a}+b_n\sin 2\pi n\frac{t_0}{a}\right)$$

   Il s'agit d'une **convergence ponctuelle** dans la mesure où cette convergence peut être vraie en t_0 mais pas en t_1 même voisin de t_0. Si ce mode de convegrence a le mérite de la simplicité (pour t_0 fixé on est ramené à une série numérique), il est souvent insuffisant notamment lorsque l'on cherche à intégrer termes à termes. On reviendra sur cette question plus loin. On introduit alors d'autres modes de convergence de la série, comme la *convergence uniforme* dans un ensemble, la *convergence normale*, la convergence *en moyenne quadratique* etc ...
3. Lorsque la série (1.9) (resp.(1.10)) converge en t_0, a-t-on bien $l=f(t_0)$ ou encore, a-t-on bien

   $$f(t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\frac{t_0}{a}+b_n\sin 2\pi n\frac{t_0}{a}\right)?$$

   C'est le problème de *la synthèse ou reconstruction du signal.* Dans ce cas on dira que f **est développable en série de Fourier en** t_0.

1.2.1 Analyse du Signal

Pour déterminer les coefficients a_n et b_n pour $n\in\mathbb{N}$ ou les c_n pour $n\in\mathbb{Z}$, on peut (formellement) faire un calcul analogue à celui effectué pour les polynômes trigonométriques. Raisonnons sur les c_n.

[5]Il peut être utile ici de revoir les rappels sur les série de fonctions et leur mode de convergence.

Calculons
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^a \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\,e^{2i\pi m\frac{t}{a}}\right] e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt$$
(Là encore on a pris soin de ne pas prendre les mêmes indices). On intervertit intégrale et somme de la série
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt = \frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \int_0^a e^{2i\pi m\frac{t}{a}}\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt$$
et on utilise de nouveau l'orthogonalité des fonctions e_n (1.3). Une seule intégrale est non nulle et vaut a, celle qui correspond à $m = n$ d'ou
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt = c_n$$
et on retrouve les formules
$$c_n(f) = c_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
et de façon analogue
$$\begin{cases} a_n(f) = a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\,\cos(2\pi n\frac{t}{a})\,dt & \text{pour tout } n \geq 1 \\ b_n(f) = b_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\,\sin(2\pi n\frac{t}{a})\,dt & \text{pour tout } n \geq 1 \\ a_0(f) = a_0 &= \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,dt \end{cases}$$

Remarque 1 *Pourquoi a-t-on parlé de calcul "formel" et où sont les difficultés dans ce calcul ?*

1. *La première difficulté est l'existence même des intégrales*
$$\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt \quad !$$
Les polynomes trigonométriques sont des fonctions continues, qui sont donc intégrables sur un intervalle $[0, a]$. *Une fonction périodique plus générale peut être beaucoup plus complexe, être discontinue (on en a vu déjà plusieurs exemples), avoir des branches infinies etc ... et donc la fonction* $f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}$ *peut ne pas être intégrable. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.*

2. *Le deuxième problème réside dans l'interversion : intégrale et somme de la série ! Lorsque l'on a une somme finie cette opération*
$$\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{N} u_n(t)\right] dt = \sum_{n=0}^{N}\int_a^b u_n(t)\,dt$$
est valide, et c'est la linéarité de l'intégrale. Par contre, lorsque l'on a une série (somme infinie) cette interversion n'est pas toujours vraie et c'est l'une des raisons pour lesquelles on introduira des modes de convergences plus contraignants que la convegrence ponctuelle rappelée plus haut et pour lesquelles cette opération si commode sera vraie. Nous reviendrons sur ce problème dans les rappels d'intégration.

Il est important ici de bien comprendre ces difficultés.

Proposition 2 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période a. Les coefficients de Fourier de f sont données par les formules suivantes*[6]

$$c_n(f) = c_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

et de façon analogue

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n(f) = a_n & = & \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\,\cos(\,2\pi n \frac{t}{a})\,dt \quad \text{pour tout } n \geq 1 \\ b_n(f) = b_n & = & \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\,\sin(\,2\pi n \frac{t}{a})\,dt \quad \text{pour tout } n \geq 1 \\ a_0(f) = a_0 & = & \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,dt \end{array} \right. \tag{1.12}$$

1.2.2 Synthèse d'un signal.

On peut étudier la convergence de séries trigonométriques du type

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{a}\right)$$

indépendamment de la forme particulière des coefficients a_n et b_n introduits précédemment. On a ici un cas particulier d'étude de *séries de fonctions.*

On peut citer à titre d'information deux résultats utiles de convergence.

Proposition 3 *Si les coefficients a_n et b_n sont positifs et décroissent vers 0, alors la série précédente converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Proposition 4 *Si la série numérique*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

converge, alors la série trigonométrique converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et même converge uniformément[7] *sur $\mathbb{R}$. On sait qu'alors la somme de la série*

$$S\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{a}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est une fonction ***continue*** *et périodique.*

En réalité ces séries trigonométriques ont surtout un intérêt dans le cadre de l'étude des fonctions périodiques. La démarche est alors la suivante.

1. A partir de f on calcule les coefficients de Fourier a_n et b_n ou c_n.
2. On étudie en même temps la convergence de la série (1.9) (resp. (1.10)) et on compare la somme obtenue à $f\,(t)$.

[6] Sous réserve d'existence des intégrales comme il a été mentionné plus haut.

[7] Pour ceux qui ne sont pas familiers avec cette notion de convergence uniforme, ne pas s'y attarder.

On va citer un résultat qui suffit pour étudier de nombreux cas. Mais auparavant il nous faut rappeler ce qu'est une fonction **continue par morceaux** et continuement dérivable par morceaux, on dit C^1 par morceaux. On rappelle que la limite à droite de f en t_0, notée $f(t_{0+})$ est définie par

$$f(t_{0+}) = \lim_{h \to 0 \text{ et } h>0} f(t_0 + h)$$

et symétriquement pour la limite à gauche $f(t_{0-})$.

Définition 3 *1) Une fonction f définie sur un intervalle borné $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** sur I si f est continue en tout point de I **sauf sur un ensemble fini de points** pour lesquels f admet une limite à droite et une limite à gauche finies (discontinuités de première espèce). Cela signifie qu'il existe une famille finie de points, $a_1, \ldots, a_n$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que f soit continue en dehors de ces points et que les limites suivantes existent et sont **finies***

$$f(a_{i^-}) = \lim_{h \to 0^{--}} f(a_i + h) \quad et \; f(a_{i^+}) = \lim_{h \to 0^{+-}} f(a_i + h)$$

(ou seulement à droite en a_1 si $a_1 = a$ ou à gauche en a_n si a_n =b). Si I n'est pas borné, on demande alors que f soit continue par morceaux sur tout sous intervalle borné de I.

*2) Une fonction f définie sur un intervalle borné $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$ est dite $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur I si f est continue par morceaux, dérivable sur I sauf sur un ensemble fini de points et à dérivée elle même continue par morceaux. Même extension que précédemment au cas I non borné.*

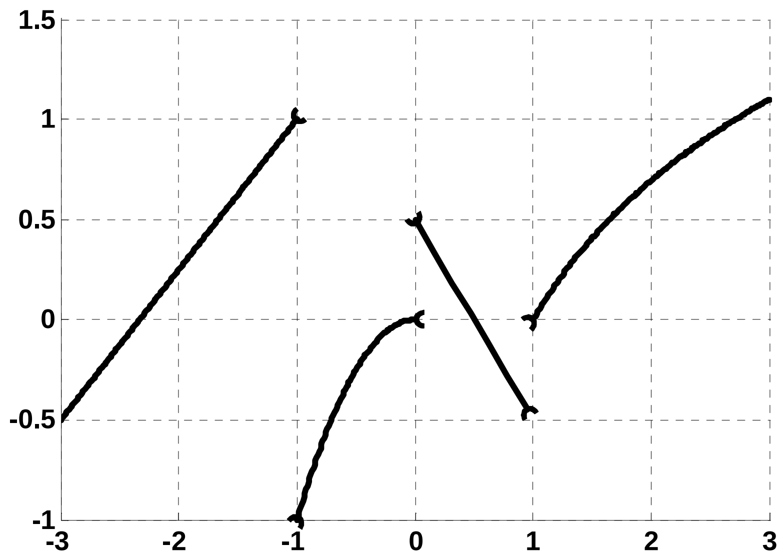

FIG. 1.4 – Exemple de fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-3,3]$.

L'idée à retenir est la suivante : on admet des discontinuités sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, et en ces points on ne doit pas avoir de limite infinie.

Par exemple, la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux. Elle est bien continue sauf au point $t = 0$ mais la limite à droite en $t = 0$ est infinie !

Voila le résultat essentiel à retenir pour la décomposition d'une fonction en séries de Fourier.

Théorème 1 ***Conditions de Dirichlet.*** *Soit f une fonction de période a et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, a]$ alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} = \frac{1}{2} \left[f(t_{0+}) + f(t_{0-}) \right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t_0}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t_0}{a} \right) = \frac{1}{2} \left[f(t_{0+}) + f(t_{0-}) \right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Ainsi si f a une discontinuité en t_0, la somme de la série de Fourier ne converge ni vers $f(t_0)$, ni vers $f(t_{0+})$, ni vers $f(t_{0-})$!.. mais vers la demi somme de ces deux valeurs. Par contre si f est continue en t_0 i.e. $f(t_0) = f(t_{0+}) = f(t_{0-})$ alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t_0}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t_0}{a} \right) = f(t_0)$$

et $f(t_0)$ est bien la somme de sa série de Fourier calculée en t_0. En termes de signal, les $\nu_n = \frac{n}{a}$ pour $n \geq 1$ sont les différentes fréquences du signal et les c_n (resp. a_n et b_n) mesurent la contribution de ces différents fréquences dans le signal. Pour un tel signal on appelle spectre de raies l'ensemble des couples $\left(\frac{n}{a}, c_n\right)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Ce sont les deux seuls points importants à bien comprendre ! Noter aussi que la simple hypothèse de continuité de f ne suffit pas pour avoir ce type d'égalité : il faut en plus des propriétés portant sur la dérivée. Pour bien comprendre ce résultat fondamental, traiter avec soin l'exemple suivant.

Exemple 1 *Considérons la fonction $f(t)$ de période 1 qui est définie par $f(t) = e^{-t}$ pour $t \in [0, 1[$. Faire un dessin avec plusieurs périodes. Le calcul (à faire) des coefficients complexes (la fonction étant elle même sous forme complexe, ce calcul est plus simple) donne*

$$c_n = \frac{1}{1 + 2in\pi} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

La fonction est clairement $\mathcal{C}^1$par morceaux sur $[0, 1]$ et continue à l'intérieur des intervalles. Par exemple, on aura pour $t \in \left]0, 1\right[$ grâce au théorème de Dirichlet

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + 2in\pi} \left(1 - \frac{1}{e} \right) e^{2i\pi nt}$$

On en déduit facilement le développement en $\cos$ *et* $\sin$ *pour $t \in \left]0, 1\right[$*

$$f(t) = \left(1 - \frac{1}{e} \right) \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4n^2\pi^2} \left(\cos(2\pi nt) + 2n\pi \sin(2\pi nt) \right) \right]$$

Par contre $t = 0$ *est une discontinuité de la fonction (voir le dessin) avec* $f(0^+) = 1$ *et* $f(0^-) = \frac{1}{e}$. *Pour* $t = 0$ *la série précédente converge vers la demi somme de ces valeurs, ce qui donne*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right) = \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1+4n^2\pi^2}\right)$$

Voici un autre exemple sur lequel réfléchir.

Exercice 6 *Soit la fonction* f *périodique de période* $a = 4$ *et définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t \in [-2,-1[\\ f(t) = 1+t & si\ t \in [-1,0[\\ f(t) = 1-t & si\ t \in [0,1[\\ f(t) = 0 & si\ t \in [1,2[\end{cases}$$

Faire le dessin de cette fonction sur plusieurs périodes. Elle est clairement paire. Il est alors préférable de calculer les coefficients a_n *et* b_n. *Grâce à la parité* $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$. *pour calculer* a_n *on calcule l'intégrale sur* $[-2,2]$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt = \int_0^1 (1-t)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt \quad pour\ n \geq 1$$

On montre, après calculs (à faire, c'est un bon exercice technique) que

$$\begin{cases} a_{4k} = 0 \quad pour\ k \neq 0 \\ a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} \quad pour\ k \in \mathbb{N} \\ a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2} \quad pour\ p \in \mathbb{N} \\ a_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La fonction $f(t)$ *est-elle continue ? Est-elle dérivable en* $t = -1,\ t = 0, t = 1,\ t = 2$? *Est-elle* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux ? Que vaut la somme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \pi n \frac{t}{2} = ?$$

Est ce vrai pour tout t *dans* $\mathbb{R}$?

1.2.3 Conservation de l'énergie.

On va donner une extension de la formule de Parseval obtenue pour les polynômes trigonométriques (1.8). Pour une fonction f de période a, son énergie est donnée par

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2\ dt$$

Mais autant pour un polynôme trigonométrique qui est une fonction continue, l'existence de cette intégrale ne pose pas de problème, il n'en va pas de même pour une fonction périodique quelconque f puisqu'elle peut avoir des discontinuités et de branches infinies. Une fonction pour laquelle cette intégrale $\int_0^a |f(t)|^2\ dt$ existe sera dite **de carré intégrable sur** $[0,a]$ et nous introduirons ces fonctions dans le chapitre d'intégration. On admet alors l'importante extension de (1.8).

Proposition 5 *Soit f une fonction de période a et de carré intégrable alors*

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right]$$

i.e. l'énergie du signal est égale à la somme des énergies de ces harmoniques.