Première semaine de travail : Série de Fourier

Formulaire de cours

Polynômes trigonométriques :

On appelle **polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à** N, toute fonction qui s'écrit

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \, e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où les c_n sont des nombres complexes. On notera $\mathcal{F}_N$ l'ensemble de ces polynômes (a étant fixé). On peut également écrire $p(t)$ à l'aide de sinus et de cosinus.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t}{a} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Coefficients de Fourier :

$$c_n(p) = c_n = \frac{1}{a} \int_0^a p(t) \, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt \quad \forall n \in [-N, N] \tag{1}$$

et donc grâce, aux formules précédentes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n(p) = a_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a p(t) \, \cos(\, 2\pi n \frac{t}{a}) \, dt \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N \\ b_n(p) = b_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a p(t) \, \sin(\, 2\pi n \frac{t}{a}) \, dt \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N \\ a_0(p) = a_0 & = & \frac{1}{a} \int_0^a p(t) \, dt \end{array} \right. \tag{2}$$

Liens entre les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pour } n \geq 1 \\ a_0 = c_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

et inversement

$$\left\{ \begin{array}{l} c_n = \frac{(a_n - ib_n)}{2} \quad \text{pour } n \geq 1 \\ c_{-n} = \frac{(a_n + ib_n)}{2} \quad \text{pour } n \geq 1 \\ c_0 = a_0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Propriétés des coefficients :

p fonction réelle	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = \overline{c_n}$	$\Longleftrightarrow$	a_n, b_n réels
p fonction paire	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = c_n$	$\Longleftrightarrow$	$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$
p fonction impaire	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = -c_n$	$\Longleftrightarrow$	$a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

Coefficients de Fourier d'une fonction f périodique.

$$c_n(f) = c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et de façon analogue

$$\begin{cases} a_n(f) = a_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{a})\, dt & \text{pour tout } n \geq 1 \\ b_n(f) = b_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{a})\, dt & \text{pour tout } n \geq 1 \\ a_0(f) = a_0 & = & \frac{1}{a} \int_0^a f(t)\, dt & \end{cases}$$

Egalité de Parseval :

Soit f une fonction de carré intégrable alors

$$\frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n|^2 + |b_n|^2 \right]$$

Théorème de Dirichlet : Soit f une fonction de période a et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, a]$ alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} = \frac{1}{2} \left[f(t_{0+}) + f(t_{0-}) \right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t_0}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t_0}{a} \right) = \frac{1}{2} \left[f(t_{0+}) + f(t_{0-}) \right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Ainsi si f a une discontinuité en t_0, la somme de la série de Fourier ne converge ni vers $f(t_0)$, ni vers $f(t_{0+})$, ni vers $f(t_{0-})$!.. mais vers la demi somme de ces deux valeurs. Par contre si f est continue en t_0 *i.e.* $f(t_0) = f(t_{0+}) = f(t_{0-})$ alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi n \frac{t_0}{a} + b_n \sin 2\pi n \frac{t_0}{a} \right) = f(t_0)$$

et $f(t_0)$ est bien la somme de sa série de Fourier calculée en t_0.