

Complement : Majorant - Minorant

QCM

Ce QCM sert à vous autoévaluer sur votre maîtrise des majorations. Il se compose de questions traitant de majorations fondamentales que vous devez absolument connaître. Le reste des questions nécessitent l'utilisation de ces majorations au travers de petits calculs. Pour certaines questions, il pourra être utile que vous vous aidiez d'un dessin de la fonction à majorer.

Plus d'une réponse peuvent être correctes.

1- Pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $f(x) = x$ est majorée par

A - 1

B - 0

C - $g(x) = x^2$

D - aucune des solutions proposées

2- Pour tout $x \in [1, 2]$, la fonction $f(x) = x$ est majorée par

A - 1

B - 2

C - $g(x) = x^2$

D - aucune des solutions proposées

3- Pour tout $x \in [0, 1]$, considérons la fonction $f(x) = 3x - 2$. $|f(x)|$ est majorée par

A - 0

B - 1

C - 2

D - aucune des solutions proposées

4- Pour tout $x \in [0, 1]$, considérons la fonction $f(x) = 3x - 2$. $|f(x)|$ est minorée par

A - 0

B - 1

C - -2

D - aucune des solutions proposées

5- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = \sin(x)$ est majorée par

A - 0

B - -1

C - 1

D - aucune des solutions proposées

6- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, considérons la fonction $f(x) = \sin(x)$. $|f(x)|$ est majorée par

A - 0

B - -1

C - 1

D - aucune des solutions proposées

7- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = \cos(x)$ est minorée par

A - 0

B - -1

C - 1

D - aucune des solutions proposées

8- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = \tan(x)$ est majorée par

A - 0

B - 1

C - $\cos(x)$

D - aucune des solutions proposées

9- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ est minorée par

A - 0

B - -1

C - 1

D - aucune des solutions proposées

10- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \sin_c(x) = \frac{\sin x}{x}$ est majorée par

A - 0

B - $g(x) = \frac{1}{x}$

C - 1

D - aucune des solutions proposées

11- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $f(x) = 1 + x$ est majorée par

A - $g(x) = x^2$

B - $h(x) = e^x$

C - 1

D - aucune des solutions proposées

12- Pour tout $x \in [1, 2]$, la fonction $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ est minorée par

A - 1

B - $\exp\left(\frac{1}{2}\right)$

C - e

D - aucune des solutions proposées

13- Pour tout $x \in]0, 1]$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est majorée par

A - $g(x) = \frac{1}{x}$

B - $h(x) = \frac{1}{x^3}$

C - $k(x) = \ln(x)$

D - aucune des solutions proposées

14- Pour tout $x \in [1, +\infty]$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est majorée par

A - $g(x) = \frac{1}{x}$

B - $h(x) = \frac{1}{x^3}$

C - $k(x) = \ln(x)$

D - aucune des solutions proposées

15- Pour tout $x \in [1, +\infty]$, la fonction $f(x) = \ln(x)$ est majorée par

A - $g(x) = \frac{1}{x}$

B - $h(x) = x$

C - $k(x) = \exp(-x)$

D - aucune des solutions proposées

16- Pour tout $x \in [1, +\infty]$, la fonction $f(x) = \ln(x^2)$ est majorée par

A - $g(x) = \ln(x)$

B - $h(x) = x$

C - $k(x) = \exp(-x)$

D - aucune des solutions proposées

17- Pour tout $x \in [-\infty, +\infty]$, la fonction $f(x) = x^2$ est majorée par

A - $g(x) = x^3$

B - $h(x) = x^4$

C - $k(x) = \exp(x)$

D - aucune des solutions proposées

18- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x) = |\ln(x)|$ est majorée par

A - $g(x) = \frac{1}{x}$

B - $h(x) = x$

C - $k(x) = \ln(x)$

D - aucune des solutions proposées

19- Pour tout $x \in]0, 1]$, la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est majorée par

A - $g(x) = \frac{1}{x}$

B - $h(x) = 1$

C - $k(x) = \frac{1}{2}$

D - aucune des solutions proposées

20- Pour tout $x \in [0, \pi]$, la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ est majorée par

A - $g(x) = \cos(x)$

B - $h(x) = \tan(x)$

C - $k(x) = \sin(x)$

D - aucune des solutions proposées

QCM de cours : correction

Nous donnerons, pour chaque question, la réponse exacte et le passage du cours qui correspond. Lorsque les questions ne seront pas une formule du cours, nous écrirons quelques lignes de justification.

1- A : La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ donc elle sera majorée par sa valeur pour la borne supérieure de l'intervalle, i.e $f(1) = 1$.

Note : La réponse **C** n'est pas bonne car nous sommes sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, on a $0 \leq x \leq 1$. Multiplions cette double inégalité par x , on obtient : $0 \leq x^2 \leq x$, ce qui est l'opposé de la réponse **C**.

2- B et C : La justification de la réponse **B** est identique à la justification de la réponse précédente. Pour la réponse **C**, nous allons appliquer un raisonnement identique à celui de la note de la question précédente. On a $1 \leq x^1$. Multiplions cette inégalité par x , on obtient : $x \leq x^2$.

3- C : Avant de chercher la majoration de la valeur absolue de f , nous allons nous intéresser au signe de f sur l'intervalle considéré. Lorsque $x \in [0, \frac{2}{3}]$, f est négative et croissante. Donc, $|f|$ est majorée par la valeur absolue de la plus petite valeur de f sur cet intervalle, i.e. $|f(0)| = |-2| = 2$. Lorsque $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, f est positive et croissante. Donc, $|f|$ est majorée par la plus grande valeur de f sur cet intervalle, i.e. $f(1) = 1$. Pour majorer f sur tout l'intervalle $[0, 1]$, nous devons prendre le max entre les deux majorants précédemment déterminés. Le max est 2 qui est donc aussi le majorant de f sur $[0, 1]$.

4- A et C : La réponse **A** est automatique car nous nous intéressons à la valeur absolue de f . Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle quel que soit la valeur de x considérée.

La réponse **C** est valable pour la raison énoncée ci-dessus : $|f|$ est positive quelque soit x considéré. Donc toute valeur négative sera plus petite que n'importe quelle valeur de $|f|$ ce qui signifie que cette valeur sera un minorant de $|f|$.

Pour savoir si la réponse **B** est possible ou non, nous devons chercher un x tel que $0 \leq |f(x)| < 1$. Considérons $x = \frac{2}{3}$, nous avons vu que $f(\frac{2}{3}) = 0$, donc $|f(\frac{2}{3})| = 0$, ce qui est incompatible avec la réponse **B**.

5- C : Le sinus (comme le cosinus) est bornée entre -1 et 1 . Donc, la valeur 1 est un majorant de la fonction sinus sur n'importe quel intervalle considéré. Ce résultat est fondamental et doit donc être connu.

6- C : Nous avons dit précédemment que le sinus est bornée entre -1 et 1 . Donc, sa valeur absolue, $|\sin(x)|$, est bornée par 0 et 1 . La seule réponse dans le choix proposé qui est supérieur ou égal à la borne supérieure de $|\sin(x)|$ est la réponse **C**.

7- B : Comme le sinus, le cosinus est bornée par -1 et 1 . Donc seulement des valeurs plus petites ou égales à -1 peuvent minorer f .

¹Nous n'avons pas besoin de considérer la majoration par la borne supérieure de l'intervalle, ici 2, car cela n'apporte rien à la démonstration.

²La valeur $x = \frac{3}{2}$ correspond à la racine de f , i.e. $f(\frac{3}{2}) = 0$.

8- D : Rappelons tout d'abord la définition de la fonction tangente :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Lorsque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, nous avons : $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$, donc $\tan(x) \geq 0$. La réponse **A** ne peut donc pas être valable. Lorsque x est au voisinage de mais non égal à $\frac{\pi}{2}$, nous avons $\cos(x)$ proche de zéro, mais non égal à zéro. Le point important est que $\cos(x)$ est beaucoup plus petit que 1 car, comme $\sin(x)$ est voisin de 1, $\tan(x) > 1$. Donc la réponse **B** n'est pas valable. Or comme la fonction cosinus est majorée par 1, la réponse **C** n'est pas valable non plus. Donc la bonne réponse est **D**.

9- D : Nous savons que la fonction cosinus est bornée par -1 et 1. Mais cela n'est pas suffisant ici car nous devons nous intéresser à $\frac{1}{\cos(x)}$. Mais le fait que la fonction cosinus soit continue sur $\mathbb{R}$ signifie qu'elle va prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[-1, 1]$ y compris 0. Or lorsque $\cos(x) = 0_+^3$, $f(x) \rightarrow +\infty$. Par contre lorsque $\cos(x) = 0_-$, $f(x) \rightarrow -\infty$. Donc aucune des réponses proposées ne sont valables.

10- C : Ce résultat est à connaître.

Note : La réponse **B** est vraie sur $\mathbb{R}^+$ mais est faux sur $\mathbb{R}^-$ car pour certaines valeurs de $x < 0$, $\sin_c(x) > 0$ alors que $\frac{1}{x}$ est négatif.

11- B : Ce résultat est aussi à connaître.

La réponse **A** n'est pas possible car par exemple pour $x = 0$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.

12- B : Manipulons quelques inégalités. Nous savons que

$$1 \leq x \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

Comme la fonction $\exp$ est croissante, si nous prenons l'exponentielle de l'inégalité précédente nous obtenons⁴ :

$$e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e$$

Donc la seule réponse valable est **B**.

13- B : Amusons nous encore avec les inégalités. Nous avons $x \leq 1$. Si nous multiplions cette inégalité par x^2 , nous obtenons que $x^3 \leq x^2$. Si maintenant nous prenons l'inverse de cette inégalité, nous avons que

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3}$$

Donc la réponse **B** est vraie.

Revenons à la première inégalité : $x \leq 1$ et multiplions la par x . Nous obtenons que $x^2 \leq x$. En prenant l'inverse de cette inégalité nous avons que

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2}$$

Donc la réponse **A** n'est pas valable.

³ $\cos(x) = 0_+$ signifie que la valeur de $\cos(x)$ est très proche de zéro et positive. $\cos(x) = 0_-$ signifie que $\cos(x)$ est voisin de zéro et négatif.

⁴ e est appelé le nombre d'Euler et est la base du logarithme népérien. Sa valeur est d'environ 2.72.

Sur $]0, 1]$, le logarithme népérien est négatif par définition donc il ne peut pas majorer f qui est positive sur ce même intervalle.

14- A : Il suffit d'appliquer le même raisonnement que précédemment, mais à partir cette fois de l'inégalité : $x \geq 1$. Nous avons donc que :

$$x \leq x^2 \leq x^3$$

et donc que

$$\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$$

Pour $x = 1$, nous avons $f(1) = 1$ et $k(1) = 0$. Donc $\ln(x)$ ne peut pas majorer f .

15- B : Considérons la limite de f , g et k quand $x \rightarrow +\infty$. Nous avons :

$$f(x) \rightarrow +\infty$$

$$g(x) \rightarrow 0$$

$$k(x) \rightarrow 0$$

donc les réponses **A** et **C** ne sont pas possible. Pour voir si la réponse **B** est valable, nous allons étudier la fonction $m(x) = h(x) - f(x)$. L'idée est d'examiner si la fonction m est positive ou négative sur tout l'intervalle. Dans le premier cas, $m(x) \geq 0$ cela impliquera que $h(x) \geq f(x)$ est donc que h majore f . Dans le cas contraire, $m(x) \leq 0$, on aura que h minore f . Pour étudier le signe de m , nous allons prendre la dérivée par rapport à x :

$$m'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Cherchons la valeur de x qui annule cette dérivée :

$$m'(x) = 0 \implies x = 1$$

De plus $m(1) = 1$ et m' est positive quand $x \geq 1$ et négatif lorsque $x \leq 1$, soit :

x	$\vdots$	0		1		$+\infty$
$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$m'(x)$	$\vdots$		-	0	+	
$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	$\vdots$	$\searrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$

Donc m est positive sur $]0, +\infty[$ ce qui implique que h majore f , i.e la réponse **B**.

16- B : voir Q15 pour la démonstration. La réponse **C** n'est pas valable pour la même raison qu'à la question Q15. Pour vérifier si la réponse **A** est valable, partons de l'inégalité $x \geq 1$. Multiplions la par x , nous obtenons : $x^2 \geq x$. Prenons le logarithme népérien de cette relation. Nous rappelons que la

fonction logarithme népérien est croissante donc nous obtenons que $\ln(x^2) \geq \ln(x)$. Donc la réponse **A** n'est pas valable.

17- D : Sur $[1, +\infty[$, nous avons $x^2 \leq x^3 \leq x^4$. Sur $[0, 1]$, nous avons la double inégalité suivante : $x^4 \leq x^3 \leq x^2$. Ce qui démontre que les réponses **A** et **B** ne sont pas valables. Quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$ alors que k tend vers 0. Donc la réponse **C** n'est pas possible non plus.

18- D : Sur $[1, +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$ donc $f(x) = \ln(x)$. h et k majore f , mais g ne majore pas f (cf Q15). Sur $]0, 1]$, $\ln(x) \leq 0$ donc $f(x) = -\ln(x)$. Comme k est négative sur cet intervalle, la réponse **C** n'est pas possible. Sur cet intervalle, h est bornée par 0 et 1. Or f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Donc la réponse **B** n'est pas possible.

19- A et B : Nous avons $0 \leq x \leq 1$ donc $1 \leq 1+x \leq 2$. Prenons l'inverse de cette inégalité, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} = f(x) \leq 1$$

Donc la réponse **B** est valable mais pas la réponse **C**.

Ensuite, nous avons que $x \leq 1+x$. Donc en prenant l'inverse de l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1+x}$$

Donc la réponse **A** est valable.

20- C : En $x = \frac{\pi}{2}$, nous avons $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Nous avons aussi que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc la réponse **A** n'est pas valable. En $x = \frac{3\pi}{4}$, nous avons que $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ et $k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc la réponse **B** n'est pas valable. Comme

$$\forall x \in [0, \pi] \quad 0 \leq \sin(x) \leq 1$$

nous avons (en multipliant l'inégalité par $\sin(x)$) :

$$0 \leq \sin^2(x) \leq \sin(x)$$

Donc la réponse **C** est valable.