Nom :

Prénom :

Contrôle de Mathématiques GEA

14 Janvier 2010

Durée 2 Heures. Seuls documents autorisés: feuille 21x27 avec notes

Cette épreuve comporte 7 questions de type QCM et cinq exercices à rédiger.

Pour la partie QCM, à chaque fois, plusieurs réponses sont proposées, pour chaque question, **une seule réponse** est juste.

Entourez le numéro de la réponse que vous choisissez.

On ne demande pas de justifier les résultats, même lorsqu'il y a un calcul à faire.

Par contre le barême est le suivant

réponse juste: +1

absence de réponse : 0

réponse fausse : -0.5

Plusieurs réponses cochées valent une réponse fausse!

Les exercices sont à traiter classiquement, avec solution rédigée sur une copie.

Le symbole $\mathbb{I}$ désigne la fonction indicatrice d'un ensemble et on notera TF pour Transformée de Fourier.

On s'aidera de la table des TFs fournie. .

Question 1

Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{pour } x > 1 \ \text{ et } \ y > 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut montrer (*on ne demande pas le calcul*) que

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy = \frac{1}{2}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = -\frac{1}{2}$$

On en déduit alors que l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{|x-y|}{(x+y)^3}\, dxdy$$

vaut :

1. $+\frac{1}{2}$

2. 0

3. $\frac{1}{4}$

4. ∞

Question 2 Si la fonction f est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f}$ est sa TF, on a nécessairement

1. $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

2. $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3. $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

4. $\widehat{f}$ est à valeurs réelles

Question 3 Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors :

1. f est nécessairement **bornée sur** $\mathbb{R}$

2. f est nécessairement **continue sur** $\mathbb{R}$

3. $f(x)$ tend nécessairement vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

4. Si $f(x)$ a une limite quand x tend vers $\pm\infty$, alors cette limite est nécessairement nulle.

Question 4

La fonction

$$h(t) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin t}{(t^2+1)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_*^+}(t)$$

1. appartient à $\mathcal{L}^1([0,\infty[)$
2. appartient à $\mathcal{L}^2([0,\infty[)$
3. appartient à $\mathcal{L}^1([0,\infty[) \cap \mathcal{L}^2([0,\infty[)$
4. n'appartient ni à $\mathcal{L}^1([0,\infty[)$, ni à $\mathcal{L}^2([0,\infty[)$.

Question 5

La distribution $T = \delta + \delta'$ opère sur les fonctions tests φ par:

1. $< T, \varphi >= \varphi(0) + \varphi'(0)$
2. $< T, \varphi >= \varphi(0) - \varphi'(0)$
3. $< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - \varphi'(x))\, dx$
4. $< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx - \varphi'(0)$

Question 6

On considère la fonction : $f(x) = \frac{1}{\sin(1/x)}$ et E l'ensemble des points où la fonction f n'est pas définie *i.e.* $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \sin(1/x) = 0\}$. Cet ensemble E est négligeable.

1. Vrai
2. Faux

Question 7

On rappelle que si g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et T une distribution quelconque, on définit la nouvelle distribution gT en posant

$$< gT, \varphi >=< T, g\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et que l'on a la formule de dérivation

$$(gT)' = g'T + gT'$$

Soit T la distribution :

$$T = \cos x\, [sign(x)]$$

Alors on a :

1. $T'' + T = 0$
2. $T'' + T = 2\delta'$
3. $T'' + T = \delta$
4. $T'' + T = 2\delta$

Exercice 1 (2 points)

Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$ .Déterminer, en justifiant avec soin :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|^{\frac{1}{n}}dx$$

Exercice 2 (3 points)

On considère la fonction

$$f(x,y)=\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$$

et l'intégrale double

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x,y)\;dxdy$$

1. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(x,y)\;dx\right]dy=\frac{\pi^2}{2}$$

2. En déduire, **en justifiant**, la valeur de l'intégrale :

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$$

Exercice 3 (4 points)

1. **Question préliminaire.** Montrer que si f et g sont des fonctions **paires**, et que le produit de convolution existe $f*g(x)$ existe pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors $f*g(x)$ est une fonction **paire.**

2. Pour $a>0$ et $b>0$, on considère les fonctions $g_a(x)=e^{-a|x|}$ et $g_b(x)=e^{-b|x|}$. Montrer que pour $x\geq 0$, on a

$$g_a*g_b(x)=\frac{2\left(ae^{-bx}-be^{-ax}\right)}{a^2-b^2}$$

et en déduire l'expression de $g_a*g_b(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (2 points)

On considère les 3 fonctions

$$f(x)=\tfrac{1}{1+x^2}\quad g(x)=\tfrac{1}{2-2x+x^2}\quad h(x)=\tfrac{x}{(1+x^2)^2}$$

et on donne $\widehat{f}(\lambda)=\pi e^{-2\pi|\lambda|}$.

1. Vérifiez que $g(x)=f(x-a)$ avec a convenablement choisi et en déduire *simplement* $\widehat{g}(\lambda)$.

2. En utilisant maintenant une propriété de dérivation, en déduire *simplement* $\widehat{h}(\lambda)$.

Exercice 5 (2 points)

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on pose : $f_a(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)}$ et $f_b(x) = \frac{1}{(x^2+b^2)}$.

1. La fonction f_a est-elle dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?

2. Quelle est la TF de f_a considérée comme fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{F}(f_a)(\lambda)$?

3. En appliquant la relation de Parseval-Plancherel, calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = ?$$