Transformée de Laplace

Solution de l'exercice 2 :

1) La transformée de Laplace de $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ est :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = pU\left(x,p\right) - u(x,0) = pU\left(x,p\right) - 6e^{-3x}$$

La transformée de Laplace de $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ est :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt$$

En admettant qu'on peut intervertir le signe $\int_0^{+\infty}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}$, on obtient :

$$TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt\right] = \frac{\partial U(x,p)}{\partial x}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - (2p+1)\,U\left(x,p\right) = -12e^{-3x}, \qquad x > 0}$$

2) On pose $F(x,p) = U(x,p)e^{-(2p+1)x}$ i.e. $U(x,p) = e^{(2p+1)x}F(x,p)$. Alors

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} = \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}e^{(2p+1)x} + (2p+1)\,e^{(2p+1)x}F(x,p)$$

En remplaçant $\dfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\boxed{\tfrac{\partial F(x,p)}{\partial x} = -12e^{-(2p+4)x} \qquad x > 0}$$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} F\left(x,p\right) &= \frac{6}{p+2}e^{-(2p+4)x} + C(p) \\ \text{ou } U(x,p) &= \frac{6}{p+2}e^{-3x} + C(p)e^{(2p+1)x} \end{aligned}$$

La condition limite $u(0,t) = 6e^{-2t}, t > 0$ donne $U\left(0,p\right) = \frac{6}{p+2}$ d'où

$$\boxed{C(p) = 0 \text{ et } U(x,p) = \tfrac{6}{p+2}e^{-3x}}$$

3) La formule d'inversion appliquée à $U\left(x,p\right)$ donne :

$$u(x,t) = \sum_{p\in \mathrm{In}(C)} \mathrm{res}\left\{U(x,p)e^{pt}\right\}$$

où $\text{In}(C)$ est l'intérieur d'un contour constitué d'une droite inclue dans le domaine de convergence (ici l'abcisse de convergence est $x_c = -2$) bouclée par un arc de cercle centré sur l'origine. La seule singularité contenue dans ce domaine est $p = -2$ qui est un pôle d'ordre 1, d'où :

$$u(x,t) = \lim_{p \to -2} (p+2)\, U(x,p) e^{pt} = 6 e^{-2t} e^{-3x}$$

ce résultat n'est valable que pour $t > 0$ (pour que le deuxième lemme de Jordan puisse s'appliquer sur le demi cercle de gauche) et pour $x > 0$ (condition imposée dans l'énoncé).