Solution de l'exercice 2 (Série 1)

Définition de f
La définition de $\log(z)$ nous amène à couper le plan complexe par une demi-droite issue de l'origine, par exemple $[0,+\infty[$. En posant $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $\theta \in [0,2\pi[$ et en choisissant $k=0$ (qui correspond à avoir des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure), on a

$$\log z = \ln r + i\theta$$

avec $\theta = 0$ sur le bord supérieur de la coupure noté souvent $z = x + i0$, avec $x > 0$. La fonction $f(z)$ est alors définie sur $\mathbb{C}$ privé de $[0,+\infty[$ et de $\{-1\}$.
Théorème des résidus
Il y a une seule singularité à l'intérieur du contour proposé, à savoir $z=-1$. Le thèorème des résidus appliqué à la fonction f sur le contour proposé s'écrit :

$$\int_{\varepsilon}^{R}\left(\frac{\ln x}{1+x}\right)^2 dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{R}^{\varepsilon}\left(\frac{\ln(x)+2i\pi}{1+x}\right)^2 dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = (2i\pi)\,\mathrm{res}f(-1) \qquad (1)$$

On notera I_1, I_2, I_3 et I_4 les quatre intégrales du membre de gauche. On a alors :
*) Intégrale $I_1 + I_3$

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} I_1 + I_3 = (4\pi^2)\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx - 4i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx}$$

*) Intégrale I_2 et I_4
Le premier lemme de Jordan s'applique sans problème pour les intégrales I_2 et I_4. En effet :

$$0 \leq \sup_{C_R}|zf(z)| \leq R\frac{(\ln R)^2+4\pi^2}{(R-1)^2} \text{ et } 0 \leq \sup_{\gamma_\varepsilon}|zf(z)| \leq \varepsilon\frac{(\ln\varepsilon)^2+4\pi^2}{(1-\varepsilon)^2}$$

On a donc :

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R}|zf(z)| = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zf(z)| = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0}$$

En faisant un passage à la limite ($\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$) dans l'équation (1), on obtient :

$$(4\pi^2)\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx - 4i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = (2i\pi)\,\mathrm{res}f(-1)$$

Il reste alors à calculer $\mathrm{res}f(-1)$. Puisque $z=-1$ est un pôle d'ordre 2 de f, on a

$$\mathrm{res}f(-1) = \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 f(z)\right] = -2i\pi$$

d'où

$$(4\pi^2)\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx - 4i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = 4\pi^2$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = 0}$$

Remarque : ce résultat peut se retrouver autrement. En effet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$$

En faisant le changement de variables $u = \frac{1}{x}$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = -\int_0^1 \frac{\ln u}{(1+u)^2} du$$

d'où

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = 0}$$

Corrections de l'exercice 2 (Série 2)

1) Puisque

$$\begin{aligned} TZ\left[y(n-1)\right] &= z^{-1}Y(z) \\ TZ\left[y(n-2)\right] &= z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

on obtient par linéarité de la TZ

$$Y(z) = X(z) - \left(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right) Y(z)$$

d'où

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \boxed{\frac{z^2}{z^2 - \left[2r\cos\theta\right] z + r^2}}$$

2) Le plus simple est de partir du résultat

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_1 - p_2}\frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{p_2}{p_2 - p_1}\frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} &= \frac{1}{p_2 - p_1}\left[\frac{-p_1\left(1 - p_2 z^{-1}\right) + p_2\left(1 - p_1 z^{-1}\right)}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{p_2 - p_1}\left[\frac{-p_1 + p_2}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)}\right] \\ &= \frac{1}{1 - (p_1 + p_2) z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - (p_1 + p_2) z + p_1 p_2} \end{aligned}$$

Si $p_1$et p_2 sont les zéros de $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$, on a

$$p_1 + p_2 = -a_1 \text{ et } p_1 p_2 = a_2$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_1 - p_2}\frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{p_2}{p_2 - p_1}\frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} &= \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \\ &= H(z) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} TZ\left[p_1^n u(n)\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_1^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[p_1 z^{-1}\right]^n \\ &= \frac{1}{1-p_1 z^{-1}} \text{ pour } \left|p_1 z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |p_1| \end{aligned}$$

D'après (**??**), on obtient :

$$h(n) = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2} u(n) = \boxed{r^n \frac{\sin\left(n+1\right)\theta}{\sin\theta} u(n)}$$