Solution de l'exercice 2 (série 1): Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \sqrt[3]{z-1}$$

1) Pour définir les déterminations de f, on pose

$$z - 1 = re^{i(\theta+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Pour que le domaine de définition de f soit $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty, 1]$, il faut couper le plan complexe par la demi droite $]-\infty, 1]$, ce qui correspond à $\theta \in]-\pi, +\pi[$. La détermination de rang k de f est alors

$$f_k(z) = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{3}} \qquad \theta \in]-\pi, +\pi[\,, r > 0$$

et cette détermination est définie pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\,]-\infty, 1]$. Au point $z = 3$, on a $\theta = 0$ et $r = 2$. Donc

$$f_k(3) = 2^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{2k\pi}{3}}$$

Il suffit donc de choisir $k = 0$ pour avoir $f_k(3) = \sqrt[3]{2}$. C'est la détermination principale de f définie par

$$\boxed{f_k(z) = r^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}, \qquad \theta \in]-\pi, +\pi[}$$

2) *Sur le bord inférieur de la coupure*, on a $\theta = -\pi$ et $r = 1 - x$ avec $x \in]-\infty, 1]$, d'où

$$\boxed{f(z) = \sqrt[3]{1-x} e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = \pi$ et $r = 1 - x$ avec $x \in]-\infty, 1]$, d'où

$$\boxed{f(z) = \sqrt[3]{1-x} e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Correction de l'exercice 2 (série 2)

1) a) Le paramétrage proposé $z - a = re^{i\theta}$ est tel que $dz = rie^{i\theta} d\theta$, d'où

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2i\pi$$

b) Le théorème de Cauchy appliqué à la fonction $f(z) = \frac{1}{z-a}$ sur le domaine $D'\backslash D$ s'écrit

$$\int_{\Gamma'^+} f(z)dz + \int_{\Gamma^-} f(z)dz = 0$$

soit

$$\int_{\Gamma'^+} f(z)dz = \int_{\Gamma^+} f(z)dz = 2i\pi$$

c) Lorsque le point a n'est pas dans le domaine D de frontière Γ, le théorème de Cauchy appliqué à la fonction f permet d'obtenir

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

2) La décomposition en éléments simples de $f(z)=\frac{3z-2}{z^2-z}$ s'écrit

$$f(z)=\frac{3z-2}{z^2-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}$$

avec

$$A=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{3z-2}{z-1}=2 \text{ et } B=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{3z-2}{z}=1$$

c'est-à-dire

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}$$

On a alors

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma \frac{2}{z}dz+\int_\Gamma \frac{1}{z-1}dz$$

Puisque le contour Γ entoure les points $z=0$ et $z=1$, d'après la question 1) b), on a

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z}=2i\pi \text{ et } \int_\Gamma \frac{1}{z-1}dz=2i\pi$$

d'où

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)dz=6i\pi}$$

Correction de l'exercice 2 (série 3)

1) En utilisant la détermination de f étudiée dans l'exercice 1 de la première semaine, on a

$$\begin{aligned}
\int_{AB} f(z)dz &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}}dx \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}}dx\\
\int_{CD} f(z)dz &= \int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{\ln(x-1)-i\pi}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx \underset{\varepsilon\to 0, R\to\infty}{\to} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1)-i\pi}{x^{1+\alpha}}dx\\
\int_{B'A'} f(z)dz &= \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx\\
\int_{D'C'} f(z)dz &= \int_{R}^{1+\varepsilon}\frac{\ln(x-1)+i\pi}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}} \underset{\varepsilon\to 0, R\to\infty}{\to} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1)+i\pi}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx
\end{aligned}$$

Le théorème de Cauchy appliqué à la fonction f sur le contour Γ s'écrit :

$$\int_\Gamma f(z)dz=0 \tag{1}$$

En faisant tendre $\varepsilon\to 0$ et $R\to\infty$ dans (1), et en utilisant les résultats admis concernant les intégrales sur γ_ε, γ'_ε et C_R, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)-i\pi}{x^{1+\alpha}}dx-\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)+i\pi}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}e^{2i\alpha\pi}}dx=0$$

soit :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}}dx\left[1-e^{-2i\alpha\pi}\right]+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x^{1+\alpha}}dx\left[1-e^{-2i\alpha\pi}\right]+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}(-i\pi)\left[1+e^{-2i\alpha\pi}\right]$$

Puisque

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x \text{ si } x<1 \\ x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

on obtient finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x|}{x^{1+\alpha}} dx \left[1-e^{-2i\alpha\pi}\right] = \frac{i\pi}{\alpha}\left[1+e^{-2i\alpha\pi}\right]$$

soit

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x|}{x^{1+\alpha}} dx &= \frac{i\pi}{\alpha}\frac{1+e^{-2i\alpha\pi}}{1-e^{-2i\alpha\pi}} \\ &= \frac{i\pi}{\alpha}\frac{e^{i\alpha\pi}+e^{-i\alpha\pi}}{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}} \\ &= \frac{\pi}{\alpha}\cot g\,(\pi\alpha) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x|}{x^{1+\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha}\cot g\,(\pi\alpha)}$$

2) Pour montrer que le premier lemme de Jordan s'applique pour l'intégrale définie sur le cercle C_R, on pose $z = Re^{i\theta}$ et on étudie

$$\begin{aligned} |zf(z)| &= \left| R\frac{\ln r' + i(\theta'-\pi)}{R^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)\theta}} \right| \\ &= \left| \frac{\ln r' + i(\theta'-\pi)}{R^{\alpha}} \right| \end{aligned}$$

Lorsque z se déplace sur le cercle C_R, on a

$$R-1 \leq r' \leq 1+R$$

En effet $r' = |z-1| = \left|Re^{i\theta}-1\right|$ et en utilisant la double inégalité

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

on a

$$R-1 \leq r' \leq R+1$$

Par ailleurs on a

$$0<\theta'<2\pi \Longrightarrow |\theta'-\pi| \leq \pi$$

d'où

$$|zf(z)| \leq \frac{\ln(1+R)+\pi}{R^{\alpha}}$$

On en déduit

$$0 \leq \sup_{C_R} |zf(z)| \leq \frac{\ln(1+R)+\pi}{R^\alpha}$$

Puisque $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{R \to +\infty} \frac{\ln(1+R)+\pi}{R^\alpha} = 0$ et par suite

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{C_R} |zf(z)| = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

Le premier lemme de Jordan peut donc s'appliquer à l'intégrale définie sur C_R.