Correction de l'exercice 1

Le contour Γ est constitué de deux arcs de cercles de rayons R et ε notés C_R et γ_ε et de deux segments de droites. La fonction f ne possède qu'un point singulier isolé $z = 0$ qui n'est pas inclus dans le domaine délimité par Γ. Elle possède donc les propriétés nécessaires à l'application du théorème de Cauchy, d'où :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

En décomposant cette intégrale, on obtient, en remarquant que $z = x$ sur l'axe des abscisses :

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)dz + \int_\epsilon^R f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz = 0 \tag{1}$$

où le signe $-$ dans γ_ε^- signifie que le cercle est parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique et bien sûr le signe $+$ dans C_R^+ indique que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique. On notera

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx, \qquad I_2 = \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)dz \\ I_3 &= \int_\epsilon^R f(x)dx, \qquad I_4 = \int_{C_R^+} f(z)dz \end{aligned}$$

- *Etude de $I_1 + I_3$*

  Le changement de variable $u = -x$ dans I_1 nous permet d'obtenir :

  $$I_1 = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_\epsilon^R \frac{e^{-iu}}{-u}du$$

  Donc

  $$\begin{aligned} I_1 + I_3 &= \int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{-x}dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx \\ &= \int_\epsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx = 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}dx \end{aligned}$$

  On voit donc que

  $$\lim_{\epsilon\to 0, R\to+\infty} I_1 + I_3 = 2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

- *Etude de I_4*

  $$I_4 = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

  En posant $g(z) = \frac{1}{z}$, on vérifie

  $$\sup_{C_R} |g(z)| = \sup_{\theta\in[0,2\pi[} \left|\frac{1}{Re^{i\theta}}\right| = \frac{1}{R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Le deuxième lemme de Jordan s'applique donc

  $$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z}dz = 0, \qquad \forall m > 0$$

Pour $m = 1$, il vient

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{R\to+\infty} I_4 = 0$$

- *Etude de* I_2

$$I_2 = \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

Le cercle γ_ε peut se paramétriser par $z = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$, d'où

$$-I_2 = \int_{\gamma_\varepsilon^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon e^{i\theta} i d\theta = i \int_0^\pi e^{i\varepsilon\cos\theta} e^{-\varepsilon\sin\theta} d\theta$$

En admettant qu'on peut intervertir $\int_0^\pi$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\pi e^{i\varepsilon\cos\theta} e^{-\varepsilon\sin\theta} d\theta &= \int_0^\pi \left\{\lim_{\varepsilon\to 0} e^{i\varepsilon\cos\theta} e^{-\varepsilon\sin\theta}\right\} d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta = \pi\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = -i\pi$$

Un passage à la limite ($\varepsilon \to 0, R \to +\infty$) dans l'expression 1 permet d'obtenir

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0$$

soit

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

qui est un résultat bien connu.

Indications pour l'exercice 2

1) En utilisant la détermination de f étudiée dans l'exercice 1 de la première semaine, montrer que

$$\int_{AB} f(z)dz \underset{\epsilon\to 0, R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}} dx \qquad \int_{CD} f(z)dz \underset{\epsilon\to 0, R\to\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1) - i\pi}{x^{1+\alpha}} dx$$

$$\int_{B'A'} f(z)dz \underset{\epsilon\to 0, R\to\infty}{\longrightarrow} -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha} e^{2i\alpha\pi}} dx \qquad \int_{D'C'} f(z)dz \underset{\epsilon\to 0, R\to\infty}{\longrightarrow} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x-1) + i\pi}{x^{1+\alpha} e^{2i\alpha\pi}} dx$$

En supposant que le premier lemme de Jordan s'applique sur les parties circulaires du contour, en déduire que

$$I = \frac{\pi}{\alpha} \cot g\,(\pi\alpha)$$

2) Pour vérifier que le premier lemme de Jordan s'applique sur le cercle C_R, poser $z = Re^{i\theta}$ et montrer que sur C_R, on a $|z(f(z)| \leq \frac{\ln(1+R)+2\pi}{R^\alpha}$ (pour ce, on montrera que $R - 1 \leq r' \leq R + 1$ et que $|\theta' - \pi| \leq \pi$). En déduire que

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{C_R} |zf(z)| = 0$$

et conclure.