## Correction de l'exercice 1

La fonction $f(z) = e^{-z^2}$ est holomorphe sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et donc le théorème de Cauchy s'applique sur le domaine de frontière $\Gamma$ :

$$\int_\Gamma e^{-z^2} dz = 0$$

On découpe alors le contour $\Gamma$ en quatre morceaux correspondant aux quatre segments de droite et on procèdera à un passage à la limite $R \to +\infty$.

- Intégrale 1 :

  Le premier segment de droite (axe des abscisses) est paramètré de la façon suivante

  $$z = x \in [-R, +R]$$

  On a donc $dz = dx$ et

  $$I_1(R) = \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx$$

  Lorsque $R \to \infty$, on obtient

  $$\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\pi}$$

- Intégrale 2 :

  Le second segment de droite est paramétré par

  $$z = R + iy, y \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$$

  On a donc $dz = idy$ et

  $$\begin{aligned} I_2(R) &= \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-(R+iy)^2} idy \\ &= ie^{-R^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-2iRy} e^{y^2} dy \end{aligned}$$

  Par suite

  $$0 \leq |I_2(R)| \leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{y^2} dy$$

  On a $\lim\limits_{R \to +\infty} e^{-R^2} = 0$ et $\int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{y^2} dy$ est une quantité indépendante de $R$. Donc

  $$\lim_{R \to +\infty} I_2(R) = 0$$

- Intégrale 3 :

  Le troisième segment de droite (parallèle à l'axe des abscisses) est paramétré par

  $$z = x + \frac{1}{2} i\alpha, x \in [-R, +R]$$

On a donc $dz = dx$ et

$$\begin{aligned} I_3(R) &= \int_{-R}^{+R} e^{-\left(x+\frac{1}{2}i\alpha\right)^2} dx \\ &= e^{\frac{\alpha^2}{4}} \int_{-R}^{+R} e^{-i\alpha x} e^{-x^2} dx \\ &= e^{\frac{\alpha^2}{4}} \left[ \int_{-R}^{+R} \cos(\alpha x) e^{-x^2} dx - i \int_{-R}^{+R} \sin(\alpha x) e^{-x^2} dx \right] \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = e^{\frac{\alpha^2}{4}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha x) e^{-x^2} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha x) e^{-x^2} dx \right]$$

- Intégrale 4 :

  Le quatrième segment de droite est paramétré par

$$z = -R + iy, y \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$$

  On a donc $dz = idy$ et

$$\begin{aligned} I_4(R) &= \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-(-R+iy)^2} idy \\ &= ie^{-R^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{2Riy} e^{y^2} dy \end{aligned}$$

  Donc

$$0 \leq |I_4(R)| \leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{y^2} dy$$

  On a $\lim_{R\to+\infty} e^{-R^2} = 0$, d'où

$$\lim_{R\to+\infty} I_4(R) = 0$$

Le théorème de Cauchy pour la fonction $f(z) = e^{-z^2}$sur le contour $\Gamma$ s'écrit

$$I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R) = 0$$

Le passage à la limite $R \to +\infty$ nous permet d'obtenir

$$\sqrt{\pi} + 0 - e^{\frac{\alpha^2}{4}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha x) e^{-x^2} dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha x) e^{-x^2} dx \right] - 0 = 0$$

En identifiant les parties réelles, on obtient finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\ dx = \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2/4}$$

Puisque la fonction $e^{-x^2} \cos(\alpha x)$ est paire, on en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\ dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\ dx \Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/4}}$$

## Indications pour l'exercice 2

1) a) Poser $z - a = re^{i\theta}$, exprimer $dz$ en fonction de $d\theta$ et montrer que l'intégrale $I$ s'écrit

$$I = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2i\pi$$

b) Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ sur le domaine $D' \backslash D$ . En déduire

$$\int_{\Gamma'^{+}} f(z)dz = \int_{\Gamma^{+}} f(z)dz = 2i\pi$$

c) Montrer que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

2) Décomposer en en éléments simples de $f(z) = \dfrac{3z-2}{z^2-z}$ sous la forme

$$f(z) = \frac{3z-2}{z^2-z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

Montrer que $A = 2$ et $B = 1$ et en déduire

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \frac{2}{z}dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{z-1}dz$$

Utiliser le résultat de la question 1) b) pour obtenir

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 6i\pi$$