Solution Exercice 1

1) En égalant la TZ des membres de droite et de gauche de l'équation aux différences

$$y(n) = x(n) - ax(n-1),$$

on obtient

$$Y(z) = X(z) - az^{-1}X(z)$$

d'où

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - az^{-1}}$$

2) La TZ de $\delta(n)$ est définie par

$$TZ\left[\delta(n)\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(n)z^{-n} = \delta(0) = 1$$

Le théorème de translation permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} TZ\left[\delta(n-1)\right] &= z^{-1}TZ\left[\delta(n)\right] \\ &= z^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$h(n) = TZ^{-1}\left[H(z)\right] = \boxed{\delta(n) - a\delta(n-1)}$$

3) La TZ de l'échelon est définie par

$$\begin{aligned} TZ\left[u(n)\right] &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } \left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \end{aligned}$$

Puisque la TZ transforme le produit de convolution en produit, la TZ de la réponse indicielle est

$$\begin{aligned} R(z) &= H(z)U(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} - a\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$r(n) = TZ^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] - aTZ^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right]$$

c'est-à-dire

$$r(n) = \boxed{u(n) - au(n-1)}$$

Indications pour l'exercice 2

1) Montrer que

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - [2r\cos\theta]\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

2) Montrer que $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = \frac{a}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{b}{1 - p_2 z^{-1}}$$

où $p_1$et p_2 sont les zéros de $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ avec

$$a = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \text{ et } b = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$$

Montrer ensuite que

$$TZ\left[p_1^n u(n)\right] = \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} \text{ pour } \left|p_1 z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |p_1|$$

et en déduire

$$h(n) = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2} u(n) = r^n \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta} u(n)$$