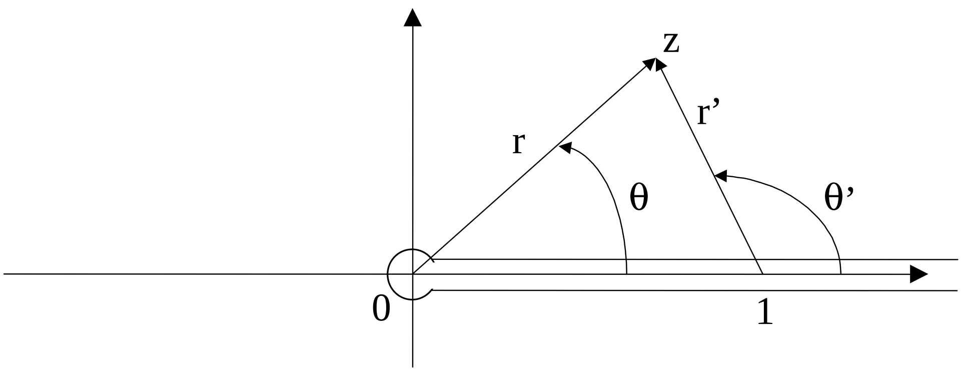
Solution de l'exercice 1 : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^{1+\alpha}} \qquad \alpha \in]0,1[$$

1) *Définition de* $f(z)$

Au vu du domaine de définition de $f(z)$, pour définir $z^{1+\alpha}$, on coupe le plan complexe par la demi-droite $[0,+\infty[$ et on pose $z = re^{i(\theta+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$. De même, pour définir $\log(1-z)$, on coupe le plan complexe par la demi-droite $[1,+\infty[$ et on pose $z-1 = r'e^{i(\theta'+2k'\pi)}, k' \in \mathbb{Z}$. En remarquant que $1-z = -(z-1) = e^{i\pi}(z-1) = r'e^{i(\theta'+2k'\pi+\pi)}$, on a successivement

$$\begin{aligned} \log(1-z) &= \ln r' + i(\theta'+2k'\pi) + i\pi \\ z^{1+\alpha} &= r^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$



Les déterminations de f sont donc définies par :

$$f_{k,k'}(z) = \frac{\ln r' + i(\theta'+2k'\pi) + i\pi}{r^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)(\theta+2k\pi)}} \qquad k,k' \in \mathbb{Z}$$

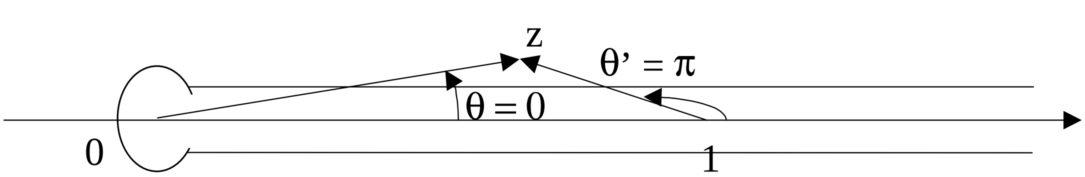
Sur le bord supérieur de la coupure correspondant à $z = x+iy$, avec $0 < x < 1$ et $y \to 0^+$, on a $\theta = 0$, $r = x, \theta' = \pi$,$r' = 1-x$. Pour avoir des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure, il suffit donc de choisir $k = 0$ et $k' = -1$, d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln r' + i(\theta'-\pi)}{r^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)\theta}}, \qquad (\theta,\theta') \in]0,2\pi[^2, r > 0, r' > 0}$$

2) *Sur le bord supérieur de la coupure*, on a deux régions :

- $z = x+iy, \; 0 < x < 1, y > 0$

  On a alors $\theta = 0, \theta' = \pi$ $r = x$ et $r' = 1-x$, comme le montre la figure suivante :

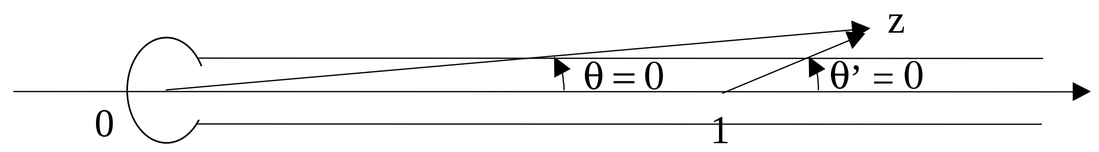


d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha}}}$$

- $z = x + iy, \;\; x > 1, y > 0$

  On a alors $\theta = 0, \theta' = 0$, $r = x$ et $r' = x - 1$, comme le montre la figure suivante :



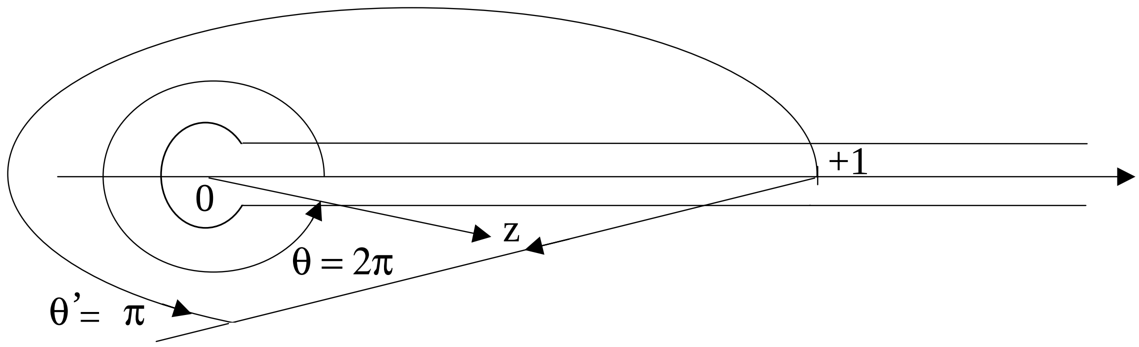
d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln(x-1) - i\pi}{x^{1+\alpha}}}$$

Sur le bord inférieur de la coupure, on a encore deux régions :

- $z = x + iy, \;\; 0 < x < 1, y < 0$

  $\theta = 2\pi, \theta' = \pi, r = x$ et $r' = 1 - x$, comme le montre la figure suivante :

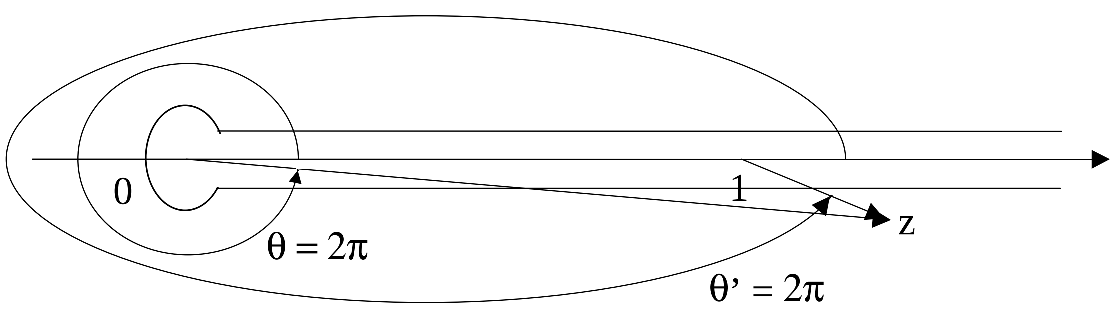


d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln(1-x)}{x^{1+\alpha} e^{2i\pi(1+\alpha)}}}$$

- $z = x + iy, \;\; x > 1, y < 0$

  On a alors $\theta = 2\pi, \theta' = 2\pi$, $r = x$ et $r' = x - 1$, comme le montre la figure suivante



d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln(x-1) + i\pi}{x^{1+\alpha} e^{2i\pi(1+\alpha)}}}$$

- Enfin sur le demi axe $x < 0$, on a $\theta = \pi, \theta' = \pi$, $r = -x$ et $r' = -x + 1$, d'où

$$\boxed{f(z) = \frac{\ln(-x+1)}{(-x)^{1+\alpha}\, e^{i\pi(1+\alpha)}}}$$

Indications pour l'exercice 2 : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \sqrt[3]{z-1}$$

1) Définir les déterminations de f à l'aide du module r et de l'argument θ de $z-1$. Vérifier que l'on doit couper le plan complexe $\mathbb{C}$ par la demi-droite $]-\infty, 1]$, ce qui correspond à $\theta \in]-\pi, +\pi[$. Montrer qu'il suffit de prendre $k = 0$ pour avoir $\sqrt[3]{2}$ au point $z = 3$
2) Déterminer r et θ sur le bord inférieur de la coupure et montrer que

$$\boxed{f(z) = \sqrt[3]{1-x}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

Déterminer r et θ sur le bord supérieur de la coupure et montrer que

$$\boxed{f(z) = \sqrt[3]{1-x}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$