Transformée de Laplace

Solution de l'exercice 1

Méthode 1
1) Un calcul élémentaire permet d'obtenir

$$Y'(p) = -\frac{1}{2p\sqrt{p}}$$

d'où

$$\boxed{2pY'(p) + Y(p) = 0} \tag{1}$$

2) En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation précédente et en utilisant la linéarité de cette transformée, on obtient :

$$2TL^{-1}\left[pY'(p)\right] + y(t) = 0 \tag{2}$$

Il suffit donc de déterminer $TL^{-1}\left[pY'(p)\right]$. On sait, d'après le cours, que

$$TL^{-1}\left[pG(p) - g(0^+)\right] = g'(t)$$

Mais si $G(p) = Y'(p)$, on a $g(t) = -ty(t)$, d'où

$$\begin{aligned} TL^{-1}\left[pY'(p) - 0\right] &= \left[-ty(t)\right]' \\ &= -y(t) - ty'(t) \end{aligned}$$

D'après (2), on a

$$2\left(-y(t) - ty'(t)\right) + y(t) = 0$$

c'est-à-dire:

$$\boxed{y(t) + 2ty'(t) = 0}$$

3) D'après la question précédente, on a

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{2t}$$

d'où par intégration

$$\begin{aligned} \ln|y(t)| &= -\frac{1}{2}\ln|t| + \text{cste} \\ &= \ln\left[|t|^{-1/2}\right] + \text{cste} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{y(t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \qquad t > 0}$$

4) D'après ce qui précéde on a $TL\left[\dfrac{C}{\sqrt{t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{p}}$, ce qui s'écrit

$$\int_0^{+\infty} \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

En considérant $p = x > 0$ et en faisant le changement de variables $u = \sqrt{xt}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} C\frac{\sqrt{x}}{u} e^{-u^2} \frac{2udu}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

D'où

$$C = \frac{1}{2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

On a donc déterminé la transformée de Laplace inverse de $Y(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$:

$$\boxed{TL^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad t > 0}$$

Méthode 2

1) Pour définir $\sqrt{z}$, il faut couper le plan complexe par une demi-droite issue de $z = 0$, par exemple $]-\infty, 0]$ comme suggéré dans l'énoncé de cet exercice. On a alors en posant $z = re^{i(\theta+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}, \theta \in]-\pi, +\pi[$:

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{\frac{i}{2}(\theta+2k\pi)}$$

La forme générale des détermination de g est donc :

$$g_k(z) = \frac{e^{zt}}{\sqrt{r}e^{\frac{i}{2}(\theta+2k\pi)}} \qquad k \in \mathbb{Z}, \theta \in]-\pi, +\pi[$$

Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = \pi$, $r = -x$ et $z = x$, soit

$$g_k(z) = \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}e^{\frac{i}{2}(\pi+2k\pi)}} = \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}i}e^{-ik\pi}$$

Pour que $g(z)$ prenne la valeur $\frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}i}$ sur le bord supérieur de la coupure, il suffit donc de choisir $k = 0$, c'est-à-dire de poser

$$\boxed{g(z) = g_0(z) = \frac{e^{zt}}{\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}} \qquad k \in \mathbb{Z}, \theta \in]-\pi, +\pi[}$$

2) Sur le bord inférieur de la coupure, on a $\theta = -\pi, r = -x$ et $z = x$, d'où :

$$g(z) = \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}e^{\frac{-i\pi}{2}}} = \boxed{\frac{e^{xt}}{-i\sqrt{-x}}}$$

3) Puisque g n'admet pas de singularité à l'intérieur du domaine proposé et que g possède les bonnes propriétés d'holomorphie et de continuité (holomorphe à l'intérieur du domaine et continue sur le bord), on peut utiliser le théorème de Cauchy qui s'écrit :

$$\int_{D'D} g(z)dz + \int_{C_R^+} g(z)dz + \int_{BA} g(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} g(z)dz + \int_{A'B'} g(z)dz = 0 \qquad (3)$$

où C_R est l'arc de cercle défini par $C_R = DC \cup CB \cup B'C' \cup C'D'$.

4) L'intégrale de $f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}$ sur le demi cercle de gauche $CB\cup B'C'$ (noté C_R^g dans le cours) tend vers 0 lorsque $R\to+\infty$ et $\varepsilon\to 0$ en vertu du $2^{ème}$ lemme de Jordan. En effet

$$\sup_{C_R}|f(z)|=\sup_{C_R}\left|\frac{1}{\sqrt{z}}\right|=\frac{1}{\sqrt{R}}\underset{R\to+\infty}{\to}0$$

donc, en posant $m=t>0$, on obtient

$$\int_{CB\cup B'C'}e^{zt}f(z)dz\underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\to}0\qquad\forall t>0$$

On admet que les intégrales sur les arcs de cercle CD et $C'D'$ tendent vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. L'intégrale sur l'arc de cercle γ_ε tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 en vertu du 1^{er} lemme de Jordan. En effet :

$$|zg(z)|=\left|z\frac{e^{zt}}{\sqrt{z}}\right|=\left|\sqrt{z}e^{zt}\right|$$

donc, en posant $z=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $-\pi\leq\theta\leq\pi$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sup_{\gamma_\varepsilon}|zg(z)| &= \sup_{\gamma_\varepsilon}\left|\sqrt{\varepsilon}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{\varepsilon e^{i\theta}t}\right|\\ &= \sup_{\gamma_\varepsilon}\left|\sqrt{\varepsilon}e^{\varepsilon(\cos\theta)t}\right|\end{aligned}$$

Puisque $\cos\theta\in[-1,+1]$, on a pour $t>0$ et $\varepsilon>0$

$$-\varepsilon t\leq\varepsilon(\cos\theta)t\leq\varepsilon t\Rightarrow e^{-\varepsilon t}\leq e^{\varepsilon(\cos\theta)t}\leq e^{\varepsilon t}$$

Donc

$$\sup_{\gamma_\varepsilon}\left|\sqrt{\varepsilon}e^{\varepsilon(\cos\theta)t}\right|\leq\sqrt{\varepsilon}e^{\varepsilon t}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

et par suite

$$\sup_{\gamma_\varepsilon}|zg(z)|\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0\Rightarrow\boxed{\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0}$$

L'expression de la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$ est par définition

$$\begin{aligned}TL^{-1}[Y(p)] &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{D'D}Y(z)e^{zt}dz\\ &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{D'D}\frac{1}{\sqrt{z}}e^{zt}dz\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}g(z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}g(z)dz=0\text{ pour }t>0$$

Donc, en appliquant le théorème de Cauchy à f sur le contour proposé, et en faisant le passage à la limite $R\to+\infty,\varepsilon\to 0$, on obtient

$$\forall t>0\qquad y(t)=-\frac{1}{2i\pi}\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}\left[\int_{BA}\frac{1}{\sqrt{z}}e^{zt}dz+\int_{A'B'}\frac{1}{\sqrt{z}}e^{zt}dz\right]\tag{4}$$

5) Examinons avec soin les deux intégrales intervenant dans (4) :

- Intégrale 1

$$\int_{BA} g(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}i}dx \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\to} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}i}dx$$

Le changement de variables $u = \sqrt{-xt}$ permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} \int_{BA} g(z)dz &= \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u/\sqrt{t}} \frac{1}{i} \frac{2udu}{t} \\ &= \frac{2}{i\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{i\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boxed{\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{t}}}\end{aligned}$$

- Intégrale 2

De même

$$\int_{A'B'} g(z)dz = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{xt}}{-i\sqrt{-x}}dx \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\to} -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{xt}}{-i\sqrt{-x}}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{xt}}{\sqrt{-x}i}dx = \boxed{\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{t}}}$$

On a donc, d'après (4) :

$$2i\pi y(t) + 0 + \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{t}} + 0 + \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{t}} = 0 \qquad t > 0$$

c'est-à-dire

$$y(t) = -\frac{2}{i}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{2i\pi} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad t > 0}$$

Indications exercice 2

1) Montrer que les transformées de Laplace de $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ sont

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] &= pU(x,p) - 6e^{-3x} \\ TL\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt \end{aligned}$$

En admettant qu'on peut intervertir le signe $\int_0^{+\infty}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}$, montrer alors que :

$$\boxed{\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} - (2p+1)\, U(x,p) = -12e^{-3x}, \qquad x > 0}$$

2) Après avoir montré que

$$\boxed{\tfrac{\partial F(x,p)}{\partial x} = -12e^{-(2p+4)x} \qquad x > 0},$$

intégrer cette équation du premier ordre à coefficients constants et montrer en utilisant la condition limite $u(0,t) = 6e^{-2t}, t > 0$ que l'on a

$$\boxed{U(x,p) = \tfrac{6}{p+2}e^{-3x} \qquad x > 0}$$

Appliquer la formule d'inversion à $U(x,p)$ (à x fixé) pour obtenir

$$u(x,t) = 6e^{-2t}e^{-3x} \qquad x > 0, t > 0$$