Solution de l'exercice 1

Domaine de définition de f

Il faut tout d'abord prendre soin de définir correctement la fonction

$$f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

Cette fonction possède deux points singuliers isolés $z = +i$ et $z = -i$. Par ailleurs, pour définir le logarithme complexe $\log z$, il faut couper le plan complexe par une demi-droite issue de l'origine. Le plus simple est de choisir comme coupure $[0, +\infty[$, c'est-à-dire de poser $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors

$$\log z = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)$$

et on peut choisir $k = 0$ qui correspond à avoir des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure (on pourrait tout aussi bien choisir d'autres valeurs de k), ce qui permet de définir $\log z$ par

$$\log z = \ln r + i\theta$$

avec $\theta = 0$ sur le bord supérieur de la coupure noté souvent $z = x + i0$, avec $x > 0$. La fonction $f(z)$ est alors définie sur $\mathbb{C}$ privé de $[0, +\infty[$ et de $\{-i, +i\}$.

Théorème des résidus

Il y a une seule singularité à l'intérieur du contour proposé, à savoir $z = i$. Le thèorème des résidus appliqué à la fonction f sur le demi cercle centré sur l'origine de rayon R fermé par les deux intervalles $[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]$ et par le demi cercle de rayon ε centré sur l'origine qui exclut le point $z = 0$ donne :

$$\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln(-x) + i\pi}{(1+x^2)^2}dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = (2i\pi)\,\mathrm{res} f\,(i) \tag{1}$$

On notera I_1, I_2, I_3 et I_4 les quatre intégrales du membre de gauche. On a alors :

*) Intégrale I_1

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx}$$

*) Intégrale I_3

$$I_3 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln(-x)}{(1+x^2)^2}dx + (i\pi)\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

On fait le changement de variables $u = -x$ pour obtenir

$$I_3 = \int_\varepsilon^R \frac{\ln u}{(1+u^2)^2}du + (i\pi)\int_\varepsilon^R \frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

et donc

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u^2)^2}du + (i\pi)\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^2}du}$$

*) Intégrale I_2

On applique le premier lemme de Jordan à l'intégrale I_2. On a

$$|zf(z)| = \left|z\frac{\log z}{(1+z^2)^2}\right|$$

Sur le cercle C_R, on a $z = Re^{i\theta}$, d'où

$$|zf(z)| = R\frac{|\ln R + i\theta|}{|1 + R^2 e^{i2\theta}|^2}$$

Mais

$$\begin{aligned} |a+b| &\leq |a| + |b| \Longrightarrow |\ln R + i\theta| \leq |\ln R| + \theta = |\ln R| + \theta \\ |a-b| &\geq ||a| - |b|| \Longrightarrow \left|R^2 e^{i2\theta} - (-1)\right| \geq \left|R^2 - 1\right| \end{aligned}$$

Puisque $R^2 - 1 > 0$ pour R “grand”, on obtient

$$|zf(z)| \leq R\frac{|\ln R| + \theta}{(R^2-1)^2} = R\frac{\ln R + \theta}{(R^2-1)^2}$$

Puisque $0 \leq \theta < 2\pi$, on en déduit

$$0 \leq \sup_{C_R} |zf(z)| \leq R\frac{\ln R + 2\pi}{(R^2-1)^2}$$

Comme $\lim\limits_{R\to+\infty} R\frac{\ln R + 2\pi}{(R^2-1)^2} = 0$, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{C_R} |zf(z)| = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

*) Intégrale I_4
On fait comme pour l'intégrale I_2 en posant $z = \varepsilon e^{i\theta}$, ce qui conduit à

$$0 \leq \sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| \leq \varepsilon\frac{|\ln\varepsilon| + 2\pi}{(1-\varepsilon^2)^2} = \varepsilon\frac{-\ln\varepsilon + 2\pi}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0}$$

En faisant un passage à la limite ($\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$) dans l'équation (1), on obtient :

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx + (i\pi)\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = (2i\pi)\,\mathrm{res}f\,(i)$$

Il reste alors à calculer $\mathrm{res}f\,(i)$. Puisque $z = i$ est un pôle d'ordre 2 de f, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{res}f\,(i) &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\log z}{(z+i)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to i} \left[\frac{1}{z\,(z+i)^2} + \frac{-2\log z}{(z+i)^3}\right] \end{aligned}$$

Le premier terme est

$$\lim_{z\to i} \frac{1}{z\,(z+i)^2} = \frac{1}{i\,(2i)^2} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

Le second terme est

$$\lim_{z\to i}\frac{-2\log z}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}\left[\log(i)\right]=\frac{-2}{-8i}\left[\ln 1+i\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{8}$$

Le résidu de f au point $z=i$ est donc

$$\boxed{\operatorname{res} f(i)=\frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}}$$

d'où

$$\begin{aligned}2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx+(i\pi)\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= (2i\pi)\left[\frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}\right]\\ &= -\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=-\frac{\pi}{4}}$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}\ =\frac{\pi}{4}}$$

Indications pour l'exercice 2

- Prenez soin de définir $\log(z)$ en posant $z=re^{i(\theta+2k\pi)}$ et en coupant le plan complexe par $[0,+\infty[$.
- Appliquer le théorème des résidus à la fonction f.

  Regrouper les intégrales I_1 et I_3 correspondant aux bords inférieur et supérieur de la coupure et montrer $\boxed{\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0} I_1+I_3=(4\pi^2)\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx-4i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx}$

  Appliquer le premier lemme de Jordan pour les intégrales définies sur les contours circulaires

  Montrer que le résidu de la fonction f au point $z=-1$ est

  $$\operatorname{res} f\,(-1)=-2i\pi$$

- En déduire

  $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=0}$$