Transformée de Laplace

Solution de l'exercice 3 :

1) Les deux premières dérivées de $Y(p) = e^{-\sqrt{p}}$ sont

$$\begin{aligned} Y'(p) &= e^{-\sqrt{p}} \left(\frac{-1}{2\sqrt{p}}\right) \\ Y''(p) &= e^{-\sqrt{p}} \left(\frac{-1}{2\sqrt{p}}\right)^2 + e^{-\sqrt{p}} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-1}{2p\sqrt{p}}\right) = \frac{e^{-\sqrt{p}}}{4p} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 4pY''(p) + 2Y'(p) - Y(p) &= e^{-\sqrt{p}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} - e^{-\sqrt{p}} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

2) Puisque $TL\left[(-1)^n t^n f(t)\right] = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$, on a

$$\begin{aligned} TL^{-1}\left[Y'(p)\right] &= -ty(t) \\ TL^{-1}\left[Y''(p)\right] &= t^2 y(t) \end{aligned}$$

En utilisant $TL\left[g'(t)\right] = pG(p) - g(0^+)$, avec $g(t) = t^2 y(t)$, on obtient

$$TL\left[2ty(t) + t^2 y'(t)\right] = pY''(p)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de l'équation précédente, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$4\left[2ty(t) + t^2 y'(t)\right] + 2\left[-ty(t)\right] - y(t) = 0$$

soit

$$\boxed{(6t - 1)\, y(t) + 4t^2 y'(t) = 0}$$

3) On peut résoudre l'équation différentielle de la question précédente comme suit :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 - 6t}{4t^2} = \frac{1}{4t^2} - \frac{3}{2t}$$

d'où par intégration

$$\ln|y(t)| = -\frac{1}{4t} - \frac{3}{2} \ln|t| + \text{cste}$$

et donc (en prenant l'exponentielle des deux membres)

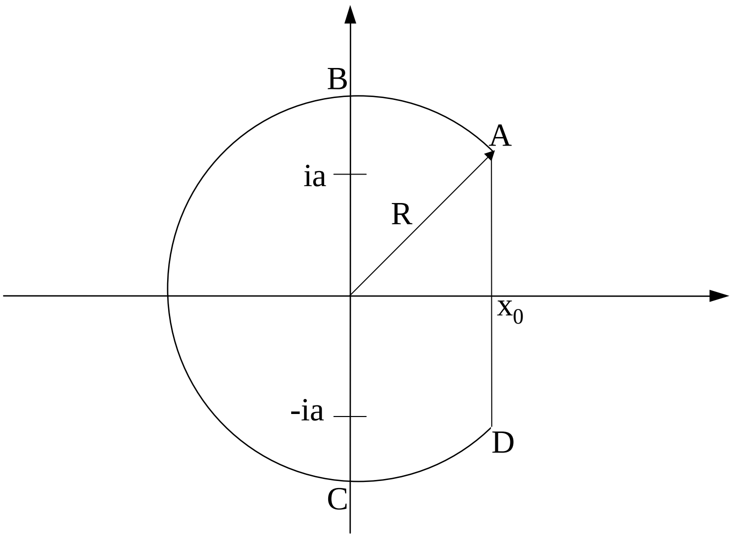
$$\boxed{y(t) = \frac{C}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4t}} \qquad t > 0}$$

Solution de l'exercice 4 :

La fonction de la variable complexe $Y(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ admet deux points singuliers isolés $z = \pm ia$. Ces deux points singuliers étant situés sur l'axe des ordonnées, l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace est $x_c = 0$, ce qui signifie que $Y(p)$ est la transformée de Laplace d'une fonction dès que $p = x + iy$ avec $x > 0$. La formule d'inversion s'écrit alors :

$$y(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_D Y(z)e^{zt}dz \qquad t > 0$$

où D est une droite d'équation $x = x_0$ située dans le domaine de convergence. Pour $Y(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$, toute droite d'équation $x = x_0$ avec $x_0 > 0$ convient. Puisque la fonction $Y(z)e^{zt}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-ia, ia\}$, on peut lui appliquer le théorème des résidus sur le contour suivant $ABCDA$ suivant :



Le théorème des résidus s'écrit :

$$\int_{AB} Y(z)e^{zt}dz + \int_{BC} Y(z)e^{zt}dz + \int_{CD} Y(z)e^{zt}dz + \int_{DA} Y(z)e^{zt}dz = (2i\pi)\left[\mathrm{res} f\,(ia) + \mathrm{res} f\,(-ia)\right] \tag{1}$$

avec $f(z) = Y(z)e^{zt}$. On admet que les intégrales sur les arcs de cercle AB et CD tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$. Par ailleurs, en utilisant la propriété $|z - z_0| \geq ||z| - |z_0||$, on a

$$|Y(z)| = \left|\frac{1}{z^2+a^2}\right| \leq \frac{1}{\left||z|^2 - a^2\right|} = \frac{1}{R^2-a^2} \text{ car } R > a$$

d'où

$$\sup_{BC} |Y(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par conséquence, en utilisant le $2^{ème}$ lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{BC'} Y(z)e^{zt}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall t > 0$$

Les résidus de $Y(z)e^{zt}$ aux points $z = ia$ et $z = -ia$ sont simples à calculer puisque ces deux points sont des pôles simples :

$$\begin{aligned}
\mathrm{res} f(ia) &= \lim_{z \to ia} (z - ia)\, Y(z) e^{zt} = \frac{1}{2ia} e^{iat} \\
\mathrm{res} f(-ia) &= \lim_{z \to -ia} (z + ia)\, Y(z) e^{zt} = \frac{1}{-2ia} e^{-iat}
\end{aligned}$$

On a alors, en faisant le passage à la limite $R \to +\infty$ dans (1), on obtient :

$$y(t) = \mathrm{res} f\,(ia) + \mathrm{res} f\,(-ia) \qquad t > 0$$

d'où

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a} \sin(at) \qquad t > 0}$$