Solution de l'exercice 3 (Série 1)

1) On pose $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}$ avec $0 < \theta < 2\pi$ et on obtient la détermination de rang k de la fonction $f(z)$:

$$f_k(z) = \frac{\ln\rho + i\,(\theta + 2k\pi)}{1+z^4}$$

qui admet pour coupure l'axe $[0, +\infty[$. Sur le bord supérieur de la coupure, on a $\theta = 0, \rho = x$ et $z = x$. Pour avoir $\log z = \ln x$ sur AB, il suffit de prendre $k = 0$, c'est-à-dire de travailler avec la détermination principale de $f(z)$:

$$f_0(z) = \frac{\ln\rho + i\theta}{1+z^4}$$

2) Sur le segment CD, on a $\theta = \pi, \rho = -x$ et $z = x$. Donc

$$f_0\,(z) = \frac{\ln(-x) + i\pi}{1+x^4}$$

tandis que sur le bord supérieur de la coupure, on a

$$f_0\,(z) = \frac{\ln x}{1+x^4}$$

3) La fonction f admet quatre pôles simples qui sont les racines de $z^4 + 1 = 0$, à savoir :

$$p_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, p_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, p_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } p_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Les pôles de f situés à l'intérieur du contour Γ sont p_1 et p_2. Puisque ces pôles sont simples, on peut déterminer les résidus de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ à l'aide de l'expression :

$$\text{res}f\,(p_i) = \frac{P\,(p_i)}{Q'\,(p_i)} = \frac{\log p_i}{4p_i^3}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\text{res}f(p_1) &= \frac{i\pi/4}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{i\pi}{16}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{i\pi\sqrt{2}}{32}\,(1+i) \\
\text{res}f(p_2) &= \frac{3i\pi/4}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{3i\pi}{16}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{3i\pi\sqrt{2}}{32}\,(1-i)
\end{aligned}$$

4) Montrons maintenant que l'intégrale sur γ_ε tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour cela, on utilise le premier lemme de Jordan qui nécessite d'étudier

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)|$$

Sur γ_ε, on a $z = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $0 \le \theta \le 2\pi$. Donc :

$$|zf(z)| = \frac{\varepsilon\,|\ln\varepsilon + i\theta|}{|1+\varepsilon^4 e^{4i\theta}|}$$

Mais $|\ln\varepsilon + i\theta| \leq |\ln\varepsilon| + 2\pi$ et $\left|1+\varepsilon^4 e^{4i\theta}\right| \geq \left||1| - \left|\varepsilon^4 e^{4i\theta}\right|\right| = 1-\varepsilon^4$, d'où

$$0 \leq |zf(z)| \leq \frac{\epsilon\left(|\ln\varepsilon| + 2\pi\right)}{1-\varepsilon^4}$$

Le dernier terme tendant vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ indépendamment de θ, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\gamma_\varepsilon} |zf(z)| = 0$$

D'après le premier lemme de Jordan, on a alors

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0}$$

De même, sur C_R, on pose $z = R\,e^{i\theta}$. Puisque $|1+z^4| \geq ||z^4|-1| = R^4 - 1$ et $\theta \leq 2\pi$, on a :

$$0 \leq |zf(z)| \leq \frac{R\left[|\ln R| + 2\pi\right]}{R^4-1}.$$

Le dernier terme tendant vers 0 lorsque $R \to +\infty$ indépendamment de θ, on en déduit

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{C_R} |zf(z)| = 0$$

d'où, d'après le premier lemme de Jordan :

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0}$$

5) La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de $[0,+\infty[$ et des quatre pôles p_1, p_2, p_2 et p_4. On peut donc appliquer le théorème des résidus à la fonction f sur le contour proposé. On obtient alors :

$$\int_{AB\cup C_R\cup DC\cup\gamma_\varepsilon} f(z)dz = (2i\pi)\left[\mathrm{res}f(p_1) + \mathrm{res}f(p_2)\right]$$

car les seules singularités situées à l'intérieur du contour sont les pôles p_1 et p_2. Les intégrales sur C_R et sur γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$. D'autre part :

$$\int_{AB} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}dx$$
$$\int_{DC} g(z)dz \underset{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-x) + i\pi}{1+x^4}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{1+x^4}dx$$

Lorsqu'on fait la somme de ces deux intégrales on obtient

$$\begin{aligned} 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}dx + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} &= 2i\pi\left[-\frac{i\pi\sqrt{2}}{32}(1+i) + \frac{3i\pi\sqrt{2}}{32}(1-i)\right] \\ &= -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}i \end{aligned}$$

d'où, par identification

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

Solution de l'exercice 3 (Série 2)

1) On a

$$n_0 y(n) = x(n) + x(n-1) + ... + x(n-n_0)$$

En prenant la transformée en Z de cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} n_0 Y(z) &= X(z) + X(z)z^{-1} + ... + X(z)z^{-n_0} \\ &= \left(1 + z^{-1} + ... + z^{-n_0}\right) X(z) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$Y(z) = \frac{1}{n_0} \frac{1 - z^{-(n_0+1)}}{1 - z^{-1}} X(z)$$

On remarque que $\frac{Y(z)}{X(z)}$ est une quantité indépendant du signal d'entrée $x(n)$. Par conséquent, $y(n)$ est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de $x(n)$. De plus, la transmittance de ce filtre est

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{n_0} \frac{1-z^{-(n_0+1)}}{1-z^{-1}}}$$

et sa réponse impulsionnelle est

$$h(n) = \frac{1}{n_0} TZ^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] - \frac{1}{n_0} TZ^{-1}\left[\frac{z^{-(n_0+1)}}{1-z^{-1}}\right]$$

d'où

$$\boxed{h(n) = \frac{1}{n_0}\left[u(n) - u(n-n_0-1)\right]}$$

où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside :

$$\begin{aligned} u(n) &= 1 \text{ si } n \geq 0 \\ u(n) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

2) Vous avez vu dans l'exercice précédent que la TZ de $x(n) = a^n u(n)$ est

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \text{ pour } |z| > |a|$$

On en déduit

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-a} H(z) \\ &= \frac{z}{z-a} \frac{1}{n_0} \left[1 + z^{-1} + ... + z^{-n_0}\right] \end{aligned}$$

et

$$Y(z)z^{n-1} = \frac{1}{n_0} \frac{z^n + z^{n-1} + ... + z^{n-n_0}}{z-a}$$

On voit donc que pour $n \geq n_0$, $Y(z)z^{n-1}$ ne possède qu'un pôle simple $z = a$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} y(n) &= \operatorname{res}\left[Y(z)z^{n-1}\right]\Big|_{z=a} \\ &= \lim_{z \to a} (z-a) Y(z) z^{n-1} = \frac{a^n + ... + a^{n-n_0}}{n_0} \end{aligned}$$

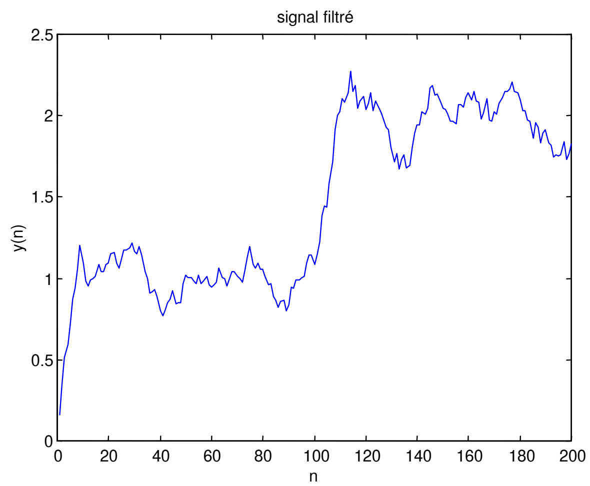
c'est-à-dire

$$\boxed{y(n) = \frac{a^{n-n_0}}{n_0}\frac{1-a^{n_0+1}}{1-a} \text{ pour } n \geq n_0}$$

Notons que ce dernier résultat n'est valable que pour $n \geq n_0$, car pour $n < n_0$, $z = 0$ est aussi un pôle de $Y(z)z^{n-1}$.
On peut trouver ce résultat plus simplement à l'aide de la définition de $y(n)$:

$$\begin{aligned}
n_0 y(n) &= x(n) + x(n-1) + ... + x(n-n_0) \\
&= a^n + a^{n-1} + ... + a^{n-n_0} \text{ si } n \geq n_0 \\
&= a^{n-n_0}\frac{1-a^{n_0+1}}{1-a}
\end{aligned}$$

3) L'opération $y(n) = \frac{1}{n_0}\sum_{k=n-n_0}^{n} x(k)$ effectue un moyennage de $x(n), ..., x(n-n_0)$, c'est-à-dire des n_0+1 dernières valeurs du signal x. Lorsque le signal oscille autour d'une valeur constante C, l'effet du moyennage est de diminuer les oscillations autour de cette constante. Prenons par exemple $n_0 = 9$, on obtient le signal filtré suivant :



Cette technique peut être utilisée pour débruiter le signal $x(n)$.