Solution de l'exercice 3 (série 1) : Etude de la fonction multiforme

$$f(z) = \sqrt{z-1}\log(3-z)$$

1) On pose $z-1 = re^{i(\theta+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$ et $z-3 = r'e^{i(\theta'+2k'\pi)}, k' \in \mathbb{Z}$. En remarquant que $3-z = -(z-3) = e^{i\pi}(z-3)$, on a successivement

$$\begin{aligned}\log(3-z) &= \ln r' + i(\theta' + 2k'\pi) + i\pi \\ \sqrt{z-1} &= \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}\end{aligned}$$

et donc

$$f_{k,k'}(z) = \{\ln r' + i(\theta' + 2k'\pi) + i\pi\}\left\{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}\right\} \qquad k, k' \in \mathbb{Z}$$

Au point $z = 4$, on a $\theta' = 0$,$r' = 1$,$\theta = 0$ et $r = 3$. Pour avoir $f_{k,k'}(4) = -i\pi\sqrt{3}$, il faut et il suffit que

$$e^{ik\pi}(1+2k') = -1 \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{ik\pi} = 1 \quad \text{et} \quad (1+2k') = -1 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ e^{ik\pi} = -1 \quad \text{et} \quad (1+2k') = 1 \end{cases}$$

d'où deux déterminations possibles :

k pair, par exemple $k = 0$, et $k' = -1$, soit :

$$\boxed{f(z) = \{\ln r' + i\theta' - i\pi\}\left\{\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}, \qquad (\theta, \theta') \in]-\pi, +\pi[^2, r > 0, r' > 0}$$

ou bien

k impair, par exemple $k = 1$, et $k' = 0$, soit :

$$\boxed{f(z) = \{\ln r' + i\theta' + i\pi\}\left\{-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}, \qquad (\theta, \theta') \in]-\pi, +\pi[^2, r > 0, r' > 0}$$

2) *Sur le bord inférieur de la coupure*, on a deux régions :

- $z = x + iy,\ x < 1, y < 0$

  On a alors $\theta = -\pi, \theta' = -\pi\ r = 1-x, r' = 3-x$, d'où

  pour la première détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3-x) - 2i\pi\}\left\{-i\sqrt{1-x}\right\}}$$

  pour la deuxième détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3-x)\}\left\{i\sqrt{1-x}\right\}}$$

- $z = x + iy,\ 1 < x < 3, y < 0$

  On a alors $\theta = 0, \theta' = -\pi,\ r = x-1, r' = 3-x$, d'où

  pour la première détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3-x) - 2i\pi\}\sqrt{x-1}}$$

  pour la deuxième détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3-x)\}\left\{-\sqrt{x-1}\right\}}$$

Sur le bord supérieur de la coupure, on a encore deux régions :

- $z = x + iy, \;\; x < 1, y > 0$

  $\theta = \pi, \theta' = \pi, r = 1 - x, r' = 3 - x$, d'où

  pour la première détermination :

  $$\boxed{f(z) = \ln(3 - x)\left\{i\sqrt{1 - x}\right\}}$$

  pour la deuxième détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3 - x) + 2i\pi\}\left\{-i\sqrt{1 - x}\right\}}$$

- $z = x + iy, \;\; 1 < x < 3, y > 0$

  On a alors $\theta = 0, \theta' = \pi$, $r = x - 1, r' = 3 - x$, d'où

  pour la première détermination :

  $$\boxed{f(z) = \ln(3 - x)\left\{\sqrt{x - 1}\right\}}$$

  pour la deuxième détermination :

  $$\boxed{f(z) = \{\ln(3 - x) + 2i\pi\}\left\{-\sqrt{x - 1}\right\}}$$

Correction de l'exercice 3 (Série 2)

Puisque la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le théorème de Cauchy appliqué à la fonction f sur le domaine délimité par Γ s'écrit

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

soit

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = 0 \tag{1}$$

- Sur γ_1, $z = x$ d'où

  $$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^R e^{-x^2}dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

  On admettra que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- On admet que

  $$\int_{\gamma_2} f(z)dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Sur γ_3, $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $0 \leq r \leq R$, donc $z^2 = r^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = r^2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = ir^2$ et $dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr$, d'où

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_R^0 e^{-ir^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 \left[\cos\left(r^2\right) - i\sin\left(r^2\right)\right] dr\end{aligned}$$

Puisque $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, on a

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(I - iJ)$$

En faisant le passage à la limite $R \to +\infty$ dans (1), on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(I - iJ) = 0$$

d'où finalement, en multipliant par $2(1-i)$:

$$(1-i)\sqrt{\pi} - 2\sqrt{2}(I - iJ) = 0$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boxed{I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Correction de l'exercice 3 (Série 3)

Le contour Γ est constitué de trois arcs de cercles de rayons R et ε notés C_R, $\gamma_{-1,\varepsilon}$ et $\gamma_{1,\varepsilon}$ et de trois segments de droites. La fonction f possède deux points singuliers isolés $z = 1$ et $z = -1$ qui ne sont pas inclus dans le domaine délimité par Γ. Elle possède donc les propriétés nécessaires à l'application du théorème de Cauchy, d'où :

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

En décomposant cette intégrale, on obtient, en remarquant que $z = x$ sur l'axe des abscisses :

$$\int_{-R}^{-1-\epsilon} f(z)dz + \int_{\gamma^-_{-1,\varepsilon}} f(z)dz + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(z)dz + \int_{\gamma^-_{1,\varepsilon}} f(z)dz + \int_{1+\epsilon}^{R} f(z)dz + \int_{C_R^+} f(z)dz = 0 \tag{2}$$

où le signe $-$ dans $\gamma^-_{1,\varepsilon}$ et $\gamma^-_{-1,\varepsilon}$ signifie que le cercle est parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique et bien sûr le signe $+$ dans C_R^+ indique que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique. On notera

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-R}^{-1-\epsilon} f(z)dz \qquad I_2 = \int_{\gamma^-_{-1,\varepsilon}} f(z)dz \\ I_3 &= \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(z)dz, \qquad I_4 = \int_{\gamma^-_{1,\varepsilon}} f(z)dz \\ I_5 &= \int_{1+\epsilon}^{R} f(z)dz, \qquad I_6 = \int_{C_R^+} f(z)dz\end{aligned}$$

- *Etude de $I_1 + I_5$*

  Le changement de variable $u = -x$ dans I_1 nous permet d'obtenir :

$$I_1 = \int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx = \int_{1+\epsilon}^{R} \frac{-ue^{-2iu}}{u^2-1}du$$

  Donc

$$\begin{aligned} I_1 + I_5 &= \int_{1+\epsilon}^{R} \frac{-xe^{-2ix}}{x^2-1}dx + \int_{1+\epsilon}^{R} \frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx \\ &= \int_{1+\epsilon}^{R} \frac{x\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)}{x^2-1}dx \\ &= 2i\int_{1+\epsilon}^{R} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx \end{aligned}$$

  On voit donc que

$$\lim_{\epsilon \to 0, R \to +\infty} I_1 + I_5 = \boxed{2i\int_{1}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx}$$

- *Etude de I_2*

  On peut paramétrer le cercle $\gamma_{-1,\varepsilon}$ par $z = -1 + \varepsilon e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. On a alors

$$\begin{aligned} z^2 - 1 &= (z-1)(z+1) \\ &= \left(-2 + \varepsilon e^{i\theta}\right)\varepsilon e^{i\theta} \\ \text{et} \quad dz &= \varepsilon e^{i\theta} i d\theta \end{aligned}$$

  Par suite

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}^{-}} f(z)dz \\ &= -\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}^{+}} f(z)dz \\ &= -\int_0^{\pi} \frac{\left(-1+\varepsilon e^{i\theta}\right)e^{2i\left(-1+\varepsilon e^{i\theta}\right)}}{\left(-2+\varepsilon e^{i\theta}\right)\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon e^{i\theta} i d\theta \\ &= -ie^{-2i}\int_0^{\pi} \frac{\left(-1+\varepsilon e^{i\theta}\right)e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\left(-2+\varepsilon e^{i\theta}\right)}d\theta \end{aligned}$$

  On admet qu'on peut intervertir le signe $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ et le signe $\int_0^{\pi}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} I_2 &= -ie^{-2i}\int_0^{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(-1+\varepsilon e^{i\theta}\right)e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\left(-2+\varepsilon e^{i\theta}\right)}d\theta \\ &= -ie^{-2i}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}d\theta \\ &= \boxed{-i\frac{\pi}{2}e^{-2i}} \end{aligned}$$

- *Etude de I_4*

  On fait de même que pour I_2 en utilisant le paramétrage $z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. On a alors

$$\begin{aligned} z^2 - 1 &= (z-1)(z+1) \\ &= \varepsilon e^{i\theta}\left(2 + \varepsilon e^{i\theta}\right) \\ \text{et} \quad dz &= \varepsilon e^{i\theta} i d\theta \end{aligned}$$

  Par suite :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\gamma_{1,\varepsilon}^-} f(z)dz \\ &= -\int_{\gamma_{1,\varepsilon}^+} f(z)dz \\ &= -\int_0^\pi \frac{\left(1+\varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\left(1+\varepsilon e^{i\theta}\right)}}{\varepsilon e^{i\theta}\left(2+\varepsilon e^{i\theta}\right)} \varepsilon e^{i\theta} i d\theta \\ &= -ie^{2i} \int_0^\pi \frac{\left(1+\varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\left(2+\varepsilon e^{i\theta}\right)} d\theta \end{aligned}$$

  On admet à nouveau qu'on peut intervertir le signe $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ et le signe $\int_0^\pi$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} I_4 &= -ie^{2i} \int_0^\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(1+\varepsilon e^{i\theta}\right) e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\left(2+\varepsilon e^{i\theta}\right)} d\theta \\ &= -ie^{2i} \int_0^\pi \frac{1}{2} d\theta \\ &= \boxed{-i\frac{\pi}{2} e^{2i}} \end{aligned}$$

- *Intégrale I_6*

  En posant $g(z) = \frac{z}{z^2-1}$, on vérifie

$$\sup_{C_R} |g(z)| = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \left| \frac{Re^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta} - 1} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1} \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Pour obtenir la dernière égalité, nous avons utilisé

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \Rightarrow \frac{1}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{1}{||z_1| - |z_2||}$$

  avec $z_1 = R^2 e^{2i\theta}$ et $z_2 = 1$. Le deuxième lemme de Jordan s'applique donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(z) e^{imz} dz = 0, \qquad \forall m > 0$$

  Pour $m = 2$, il vient

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0$$

  c'est-à-dire

$$\lim_{R\to+\infty} I_6 = \boxed{0}$$

- *Intégrale I_3*

  On découpe l'intégrale I_3 en deux morceaux comme suit

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(z)dz \\ &= \int_{-1+\epsilon}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{1-\epsilon} f(z)dz \\ &= \int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx + \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx \end{aligned}$$

  Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $u = -x$ pour obtenir :

$$\int_{-1+\epsilon}^{0} \frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx = \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{-ue^{-2iu}}{u^2-1}du$$

  d'où

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{-xe^{-2ix} + xe^{2ix}}{x^2-1}dx \\ &= 2i \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx \end{aligned}$$

  et par passage à la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_3 = \boxed{2i \int_{0}^{1} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx}$$

Un passage à la limite ($\varepsilon \to 0, R \to +\infty$) dans l'expression (2) permet d'obtenir

$$2i \int_{1}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx - i\frac{\pi}{2}e^{-2i} + 2i \int_{0}^{1} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx - i\frac{\pi}{2}e^{2i} + 0 = 0$$

soit

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2-1}dx = \frac{1}{2i}i\frac{\pi}{2}e^{2i} + i\frac{\pi}{2}e^{-2i} = \boxed{\frac{\pi}{2}\cos 2}$$