Partiel de Variable Complexe — Samedi 7 novembre 2009

Tous documents distribués autorisés

Exercice 1

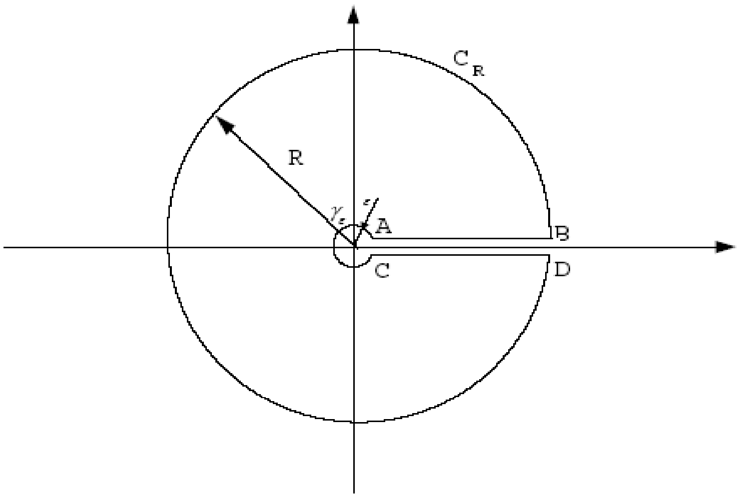
On examine la fonction

$$g(z) = \frac{[\log z]^2}{z^4 + 1}$$

1) On étudie d'abord la fonction $f(z) = \log z$. On cherche la détermination de ***f*(z)** ayant pour coupure le demi axe des réels positifs et qui prend des valeurs réelles sur le bord inférieur de la coupure correspondant à $z = x + iy$, avec $0 < x < \infty$ et $y \to 0^-$. Déterminer les expressions de cette détermination sur le bord supérieur et le bord inférieur de cette coupure. (On garde cette détermination pour le reste de cet exercice)

2) Identifier les points singuliers de la fonction ***g*(z)** et indiquer le ou les points singuliers isolés. Déterminer les résidus de la fonction ***g*(z)** en ses (ou son) points singuliers isolés.

3) Appliquer le théorème des résidus à ***g*(z)** sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$:



Démontrer avec soin que les intégrales de ***g*(z)** sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Exercice 2

On considère l'équation récurrente

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = x(n), \qquad n > 0$$

Modélisant un système d'entrée ***x*(*n*)** et de sortie ***y*(*n*)**. On supposera dans cet exercice que l'entrée et la sortie du système sont des fonctions causales.

1) Montrer que la fonction de transfert (appelée aussi transmittance) ***H*(*z*)** de ce système s'écrit sous la forme

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1-a_2z^{-1}}$$

et identifier les constantes réelles a_1 et a_2 ;

2) Déterminer TZ[***u*(*n*-1)**] où ***u*(*n*)** est l'échelon de Heaviside défini par :

$$u(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

3) En fonction des résultats précédents et des propriétés de TZ (tableau à la fin des exercices), identifier la réponse impulsionelle ***h*(*n*)**.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t)+\frac{d}{dt}f(t)=g(t), \qquad t>0$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0)=1, \quad \frac{d}{dt}f(0)=-2, \quad \frac{d^2}{dt^2}f(0)=3$$

1) En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, montrer que $F(p)=TL\left[f(t)\right]$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$F(p)=A(p)+G(p)B(p)$$

où $G(p)=TL\left[g(t)\right]$; $A(p)$ et $B(p)$ sont deux fonctions à préciser.

2) Montrer que $A(p)$ s'écrit sous la forme

$$A(p)=\frac{a_1+\ a_2p}{p^2+1}+\frac{a_3}{p}$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont 3 réels à déterminer par identification.
En déduire à l'aide des tables $a(t) = TL^{-1}[A(p)]$

3) On considère la fonction $g(t)=\mathrm{u}(t)$, où u(t) est l'échelon de Heaviside. Déterminer $G(p)B(p)$;

4) On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$. Répondre aux questions suivantes :

- définir le contour de Bromwitch correspondant à ce problème,
- calculer les résidus de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ en ses points singuliers isolés,
- en admettant que l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R \to \infty$, déterminer la solution de l'équation différentielle $f(t)$.

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p)dp$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t}u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$e^{i\omega t}u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)\,u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$sh\,(\alpha t)\,u(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\mathrm{Re}\,(\alpha)\,, \mathrm{Re}\,(-\alpha)\right)$
$\cos(\omega t)\,u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin(\omega t)\,u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$t^n u(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^n e^{\alpha t}u(t)$, $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$x_c = \mathrm{Re}\,\alpha$
$t^\alpha u(t)$, $\alpha \in \left]-1, +\infty\right[$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$x_c = 0$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0}F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$