Partiel de Variable Complexe Samedi 5 novembre 2011

Tous documents distribués autorisés. Calculatrice autorisée.

Exercice 1

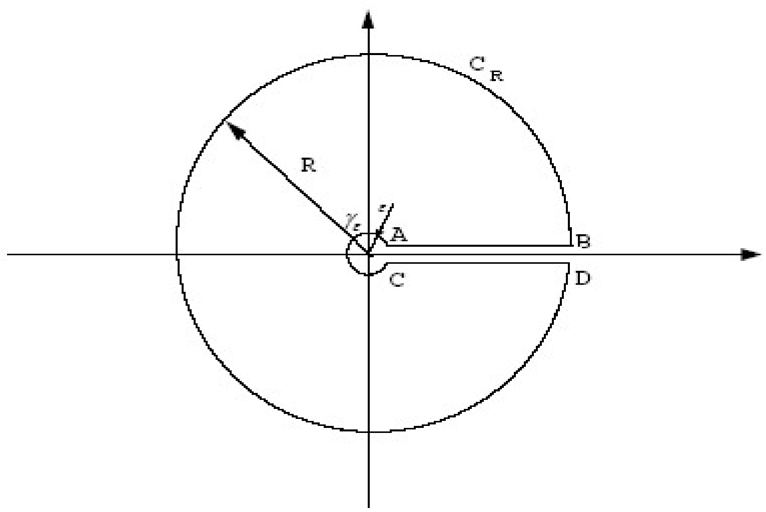
Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x+10\right)}$$

1) Définir la détermination de $f\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ ayant pour coupure le demi axe des réels positifs et qui prend la valeur de $-j$ en z = -1. Déterminer les valeurs de cette détermination sur le bord supérieur et le bord inférieur de cette coupure.

2) Déterminer le résidu de la fonction $g\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{z}\left(z+10\right)}$ en z=-10.

3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$:



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0, lorsque R → +∞ et ε → 0 respectivement. En déduire la valeur de l'intégrale I recherchée.

Exercice 2

On considère l'équation récurrente

$$y\left(n\right) - \frac{y\left(n-2\right)}{4} = x\left(n-1\right)$$

Modélisant un système d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$. On supposera dans cet exercice que l'entrée et la sortie du système sont des fonctions causales.

1) Déterminer la fonction de transfert définie par $H(z) = Y(z)/X(z)$:

2) On défini par $\delta(n)$ une impulsion et $h(n)$ un échelon de Heaviside :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $U(z)$=TZ[$u(n)$].

3) $r(n)$ est la réponse indicielle du système, à savoir la réponse du système à une entrée $x(n)=u(n)$. On rappelle que la région de convergence d'un système causal est $|z| > \rho$, où ρ est le maximum des modules des pôles de ce système. On donne la formule d'inversion de la transformée en Z inverse :

$$r(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C^+} H(z) U(z) z^{n-1} dz$$

avec C^+ un contour fermé incluant l'anneau de convergence et entourant l'origine.

Déterminer $r(n)$ par la formule d'inversion.

4) A l'aide de la relation $\delta(n) = u(n)-u(n-1)$, identifier la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système, à savoir à la réponse du système à une entrée $x(n)=\delta(n)$ à partir des résultats précédents.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$f''' - 3f' - 2f = g(t) \qquad (\star)$$

avec les conditions initiales

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0^+) = f''(0^+) = 1.$$

1. En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, montrez que $F(p) = TL[f(t)]$ peut s'écrire sous la forme

   $$F(p) = A(p) + G(p)B(p)$$

   où $G(p) = TL[g(t)]$ et où $A(p)$ et $B(p)$ sont deux fonctions à préciser.
2. Déterminez à l'aide des tables $a(t) = TL^{-1}[A(p)]$.
3. On considère la fonction $g(t) = u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside. Déterminez $G(p)B(p)$.
   On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$. Pour cela :
   (a) Définissez le contour de Bromwitch correspondant à ce problème.
   (b) Justifiez brièvement que l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque le rayon du contour tend vers $+\infty$.
   (c) Calculez les résidus de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ en ses points singuliers isolés.
   (d) Déterminez la solution de l'équation différentielle $(\star)$.

Tables

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{\infty} F(p)\mathrm{d}p$
$\mathrm{e}^{\alpha t} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$\mathrm{e}^{-ap} F(p)$
$f\left(\dfrac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\displaystyle\int_0^t f(u)g(t-u)\mathrm{d}u$	$F(p)G(p)$

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$x_c = 0$
$\mathrm{e}^{\alpha t} u(t), \alpha \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\alpha$
$\mathrm{e}^{i\omega t} u(t), \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$\mathrm{ch}(\alpha t)u(t), \alpha \in \mathbb{C}$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup(\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(-\alpha))$
$\mathrm{sh}(\alpha t)u(t), \alpha \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup(\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(-\alpha))$
$\cos(\omega t)u(t), \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin(\omega t)u(t), \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$t^n u(t), n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^n \mathrm{e}^{\alpha t} u(t), n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$x_c = \mathrm{Re}\alpha$
$t^{\alpha} u(t), \alpha \in]-1, +\infty[$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$x_c = 0$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\dfrac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}$
$f(n) * g(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$