Partiel de Variable Complexe

(Une feuille A4 recto-verso autorisée) Samedi 19 Janvier 2008

Exercice 1

Le but de cet exercice est de déterminer

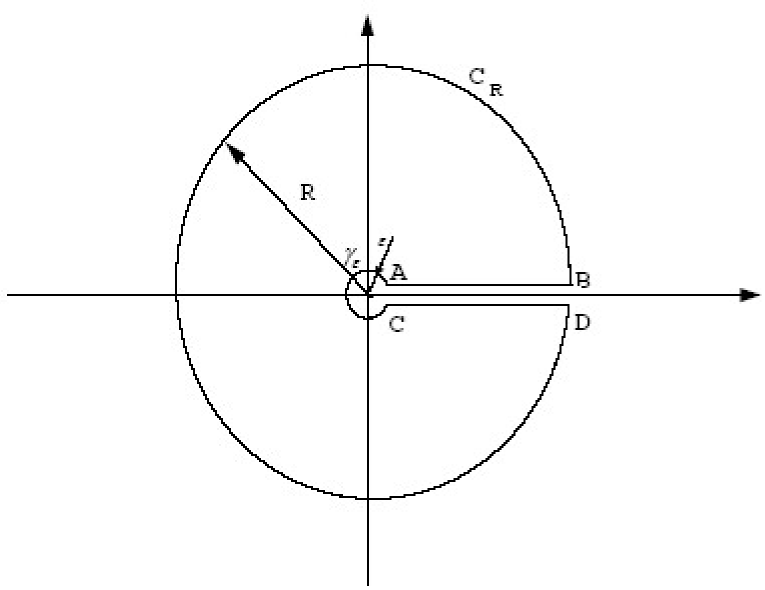
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx$$

1) Définir la détermination de $f(z) = \sqrt{z}$ ayant pour coupure le demi axe des réels positifs et qui prend la valeur de i en z=-1. Déterminer les valeurs de cette détermination sur le bord supérieur et le bord inférieur de cette coupure.
2) Déterminer les résidus de la fonction

$$g(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3+1}$$

en ses points singuliers isolés. Identifier préalablement les 3 points singuliers isolés.

3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction g sur le contour $AB \cup C_R \cup DC \cup \gamma_\varepsilon$:



Démontrer avec soin que les intégrales de g sur les contours circulaires C_R et γ_ε tendent vers 0, lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ respectivement. En déduire la valeur de l'intégrale I recherchée.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$f''(t)+4f'(t)+4f(t)=g(t), \qquad t>0$$

avec les conditions initiales suivantes

$$f(0) = -2 \text{ et } f'(0) = 8$$

1) En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, montrer que $F(p)=TL\left[f(t)\right]$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$F(p)=A(p)+G(p)B(p)$$

où $G(p)=TL\left[g(t)\right]$ et où $A(p)$ et $B(p)$ sont deux fonctions à préciser.
2) Montrer que $A(p)$ s'écrit sous la forme

$$A(p)=\frac{a_1}{p+2}+\frac{a_2}{(p+2)^2}$$

où a_1 et a_2 sont deux réels à préciser. En déduire à l'aide des tables $a(t) = TL^{-1}[A(p)]$
3) On considère la fonction $g(t) = 6e^{-2t}u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside. Déterminer $G(p)B(p)$.
On désire appliquer la formule d'inversion de la transformée de Laplace à la fonction $G(p)B(p)$.
Répondre aux questions suivantes :

- définir le contour de Bromwich correspondant à ce problème,
- justifier brièvement que l'intégrale sur le contour circulaire tend vers 0 lorsque $R \to \infty$,
- calculer les résidus de la fonction $G(p)B(p)e^{pt}$ en ses points singuliers isolés,
- déterminer la solution de l'équation différentielle $f(t)$.

Exercice 3 : TRANSFORMEE EN Z :
On considère l'opération qui au signal $x(n)$ associe le signal $y_1(n)$ défini par

$$y_1(n) = \sum_{i=n-L}^{n-1} x(i) \tag{1}$$

1. Cette opération décrit-elle un filtre linéaire ? Pourquoi ? Si oui, donner sa fonction de transfert $H_1(z)$ ainsi que sa réponse impulsionnelle $h_1(z)$.

2. Soit le signal $s_1(n)$ défini par

$$\begin{aligned} s_1(i) &= 0 \text{ si } i \leq 0 \\ s_1(i) &= i \text{ si } i \in \{1, ..., L\} \\ s_1(i) &= L \text{ si } i > L \end{aligned}$$

   Montrer que la transformée en Z de s_1 est

$$S_1(z) = \frac{z^{-1}(1 - z^{-L})}{(1 - z^{-1})^2}$$

3. Calculer $Y_1(z)$ lorsque $x(n) = u(n)$ (échelon de Heaviside). En déduire la *réponse indicielle* du système, définie comme la sortie du système lorsque l'entrée est l'échelon de Heaviside.

4. On considère l'opération qui au signal $x(n)$ associe le signal $y_2(n)$ défini par

$$y_2(n) = \sum_{i=n+1}^{n+L} x(i) \tag{2}$$

   Déterminer la réponse indicielle de ce système en utilisant uniquement la rrelation (2). Tracer cette réponse indicielle.

5. Soit finalement le système défini par

$$y(n) = -\sum_{i=n-L}^{n-1} x(i) + \sum_{i=n+1}^{n+L} x(i)$$

   Déterminer la réponse indicielle de ce système. Quel est l'effet de ce système sur le signal représenté sur la figure 1. Donner une application pratique de ce résultat.

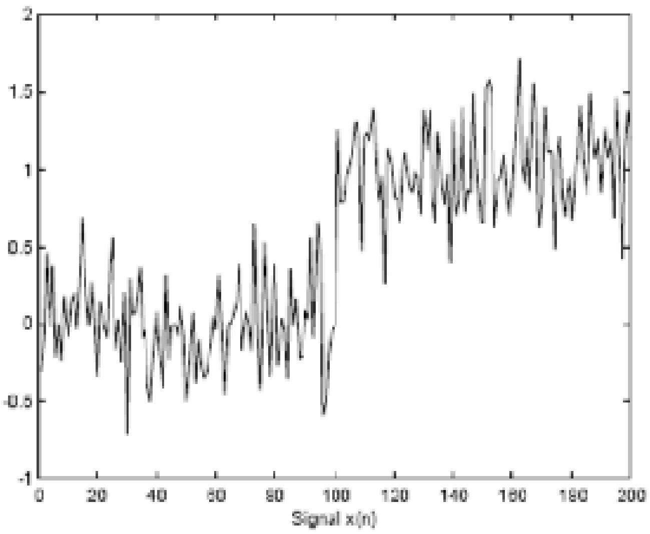


Figure 1 : Signal $x(n)$.

Rappels

Fonction	TL
$f(t)$	$F(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} F(p)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p)dp$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$kF(kp)$
$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(p)G(p)$

Fonction	TL	Convergence
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t} u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \operatorname{Re}\alpha$
$e^{i\omega t} u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)\, u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(-\alpha)\right)$
$sh\,(\alpha t)\, u(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup\left(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(-\alpha)\right)$
$\cos(\omega t)\, u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin(\omega t)\, u(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$t^n u(t),\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^n e^{\alpha t} u(t),\ n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$x_c = \operatorname{Re}\alpha$
$t^{\alpha} u(t),\ \alpha \in \left]-1, +\infty\right[$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$x_c = 0$

Fonction	TZ
$f(n)$	$F(z)$
$f(n-n_0)$	$z^{-n_0} F(z)$
$a^n f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$nf(n)$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$	$F(z)G(z)$